

3 Beispiele zur zusammengesetzten Beanspruchung

In der Praxis wirken an Bauteilen oftmals mehrere Beanspruchungen gleichzeitig. Man bezeichnet diese Fälle als zusammengesetzte Beanspruchung. So können zum Beispiel gleichzeitig

- Zug und Biegung
- Druck und Biegung
- Biegung und Torsion etc.

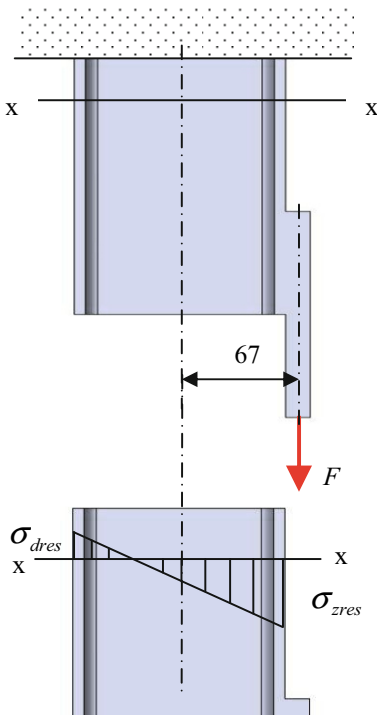
an einer bestimmten Stelle im Bauteil wirken. Auch diese Spannungsverhältnisse können mit Simulationen sehr anschaulich dargestellt werden. Wir lösen im Folgenden Beispiele zu Biegung/Zug, Biegung/Torsion, Biegung in zwei Richtungen und dann noch ein komplexeres Beispiel mit Biegung/Druck/Abscheren und Torsion.

3.1 Träger mit Biegung und Zug

Am unten dargestellten Träger (IPE 120) ist ein Blech 14 mm x 64 mm angeschweißt. Der Träger ist oben fest eingespannt. Das Blech wird mittig mit einer Kraft $F = 70 \text{ kN}$ belastet.

Wie groß ist die Vergleichsspannung nach Von-Mises im Querschnitt x-x?

Material: S235



Lösung:

Im Schnitt x-x wirken Zug- und Biegespannung.

Die Zugspannung beträgt:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{70\,000 \text{ N}}{1\,321 \text{ mm}^2} = 53 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Biegespannung beträgt:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{70\,000 \text{ N} \cdot 67 \text{ mm}}{53\,000 \text{ mm}^3} = 88,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

(Werte für Fläche A und Widerstandsmoment W z. B. aus [6])

Die resultierende Zugspannung beträgt:

$$\sigma_{zres} = \sigma_z + \sigma_b = 141,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

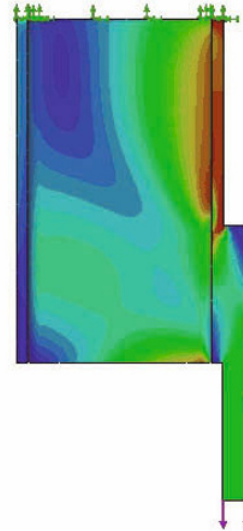
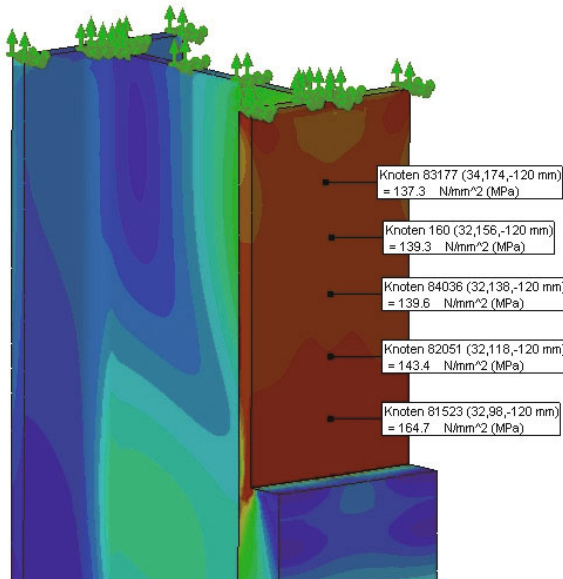
Die resultierende Druckspannung beträgt:

$$\sigma_{dres} = \sigma_b - \sigma_z = 35,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

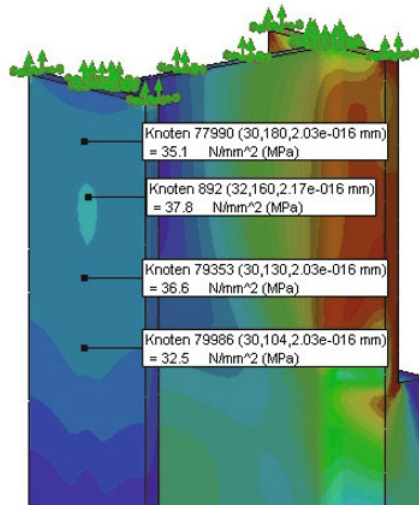
FEM-Analyse:

1. Öffnen Sie das Bauteil (TrägerBiegZug.sldprt).
2. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
3. Definieren Sie die Feste Einspannung.
4. Definieren Sie die Kraft $F = 70 \text{ kN}$.
5. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße 4 mm .
6. Führen Sie die Studie aus.
7. Interpretation der Ergebnisse:

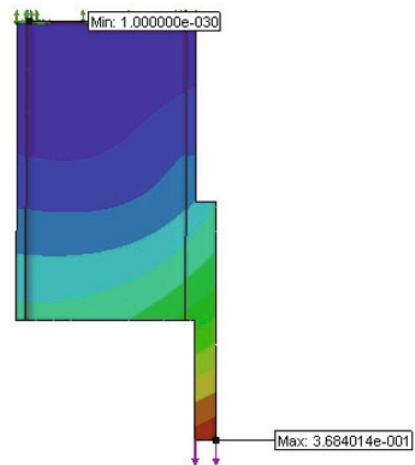
Der Spannungsverlauf im Bauteil ist in nebenstehender Grafik sehr gut zu sehen. Die Position des Schnitts x-x ist in der Aufgabenstellung nicht definiert. Wenn man nun rechts und links außen mit Sondieren die Von-Mises-Spannungswerte misst, stellt man fest, dass die Werte sich verändern.



Auf der rechten Seite liegen die gemessenen Werte zwischen $137,3 \dots 143,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Diese Werte stimmen sehr gut mit dem berechneten Wert $141,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ überein. Auf der linken Seite liegen die Werte zwischen $35,1 - 37,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Auch diese Werte stimmen gut mit dem berechneten Wert $35,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ überein.



Man erkennt in den obigen Grafiken sehr gut, wie sich die Spannung im gesamten Bauteil aufbaut. Das gibt dem Anwender einen viel klareren Eindruck über den Kraftfluss in der zu analysierenden Konstruktion. Gerade in Hinblick auf mögliche Materialeinsparungen ist das natürlich eine große Hilfe. Möchte man noch wissen, wie groß die zu erwartende Verformung ist, muss man die **Ver-schiebung!** anzeigen lassen. Die maximale simulierte Verformung beträgt 0,37 mm am unteren Ende des angeschweißten Bleches. Diesen Wert von Hand zu berechnen ist gar nicht mehr so einfach. Als Überschlagsrechnung versuchen wir, die Längenänderungen beider Einzelteile unter der Annahme reiner Zugbelastung zu berechnen und nach dem Superpositionsprinzip zu addieren:



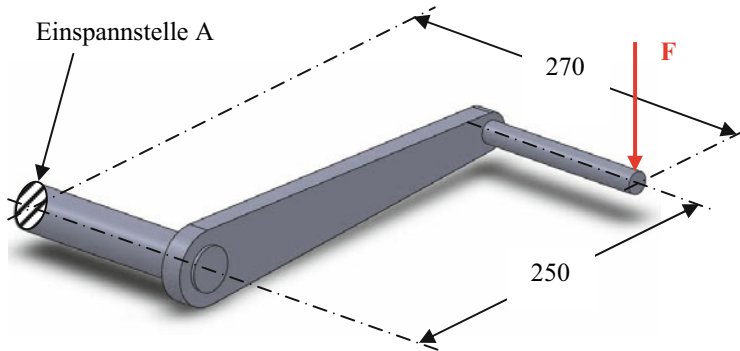
Die Längenänderung wird dabei nach dem Hook'schen Gesetz berechnet: $\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E}$

$$\Delta l_{\text{ges}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{70\,000 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{1\,320 \text{ mm}^2 \cdot 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} + \frac{70\,000 \text{ N} \cdot 160 \text{ mm}}{(14 \cdot 64) \text{ mm}^2 \cdot 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 0,11 \text{ mm}$$

Der simulierte Wert ist mehr als dreimal so groß – wird aber bestimmt näher beim realen Wert liegen als der berechnete.

3.2 Welle mit Biegung und Torsion

Der unten dargestellte Schalthebel aus S235 ist an der Fläche A fest eingespannt. Er wird mit der Kraft $F = 200 \text{ N}$ ruhend an der bezeichneten Stelle belastet. Wie groß ist die Von-Mises-Spannung im Einspannquerschnitt (Durchmesser $d = 30 \text{ mm}$)?



Lösung:

Biegespannung an Einspannstelle:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{200 \text{ N} \cdot 270 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot (30 \text{ mm})^3}{32}} = 20,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Torsionsspannung an Einspannstelle:

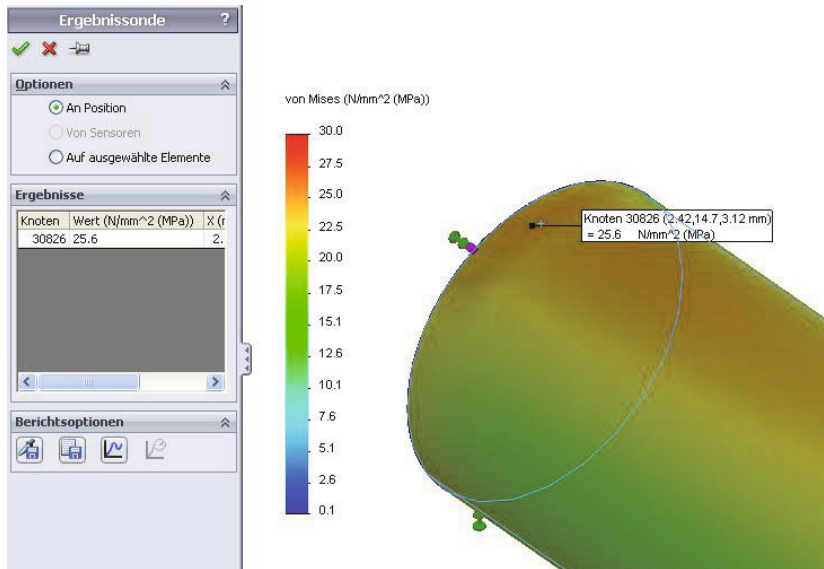
$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{200 \text{ N} \cdot 250 \text{ mm}}{\frac{\pi \cdot (30 \text{ mm})^3}{16}} = 9,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Vergleichsspannung nach Von-Mises:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2} = \sqrt{\left(20,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(9,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)^2} = 26,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

FEM-Analyse:

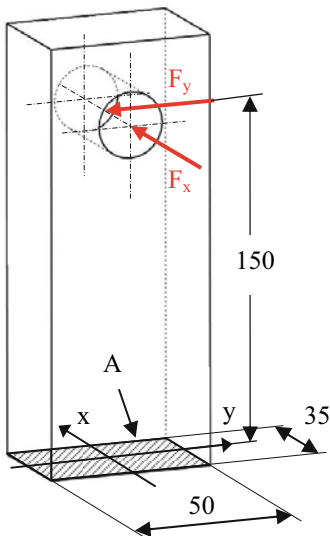
1. Öffnen Sie das Bauteil (WelleBiegTorsion.sldprt).
2. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
3. Definieren Sie die Feste Einspannung.
4. Definieren Sie die Kraft $F = 200 \text{ N}$.
5. Wenden Sie eine Vernetzungssteuerung mit Elementgröße ca. $3,25 \text{ mm}$ auf die Welle (Einspannstelle) an.
6. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße 6 mm .
7. Führen Sie die Studie aus und **Sondieren** Sie.



Die sondierte Von-Mises-Spannung beträgt $25,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Die Abweichung zum berechneten

Wert $\sigma_v = 26,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ liegt bei ca. 1,9 %.

3.3 Flachstahl mit Biegung und Biegung



Der links dargestellte Flachstahl (S235) wird durch zwei Kräfte belastet. Die Kräfte betragen $F_x = 2750 \text{ N}$ und $F_y = 3629 \text{ N}$. Man berechne in der Querschnittsfläche A die maximale Normalspannung (Schubspannungen vernachlässigbar klein).

Lösung:

Biegung um x-Achse:

$$\sigma_{bx} = \frac{M_{bx}}{W_x} = \frac{F_y \cdot 150 \text{ mm}}{\frac{35 \text{ mm} \cdot (50 \text{ mm})^2}{6}} = 37,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Biegung um y-Achse:

$$\sigma_{by} = \frac{M_{by}}{W_y} = \frac{F_x \cdot 150 \text{ mm}}{\frac{50 \text{ mm} \cdot (35 \text{ mm})^2}{6}} = 40,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die so berechneten Werte kann man sich folgendermaßen vorstellen:

Die Biegespannungen sind Normalspannungen und können einfach addiert bzw. subtrahiert werden. An der Stelle (1) wirkt die resultierende Biegedruckspannung:

$$\sigma_{\text{resb1}} = \sigma_{\text{bx}} + \sigma_{\text{by}} = 77,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

An der Stelle (2) die resultierende Biegezugspannung:

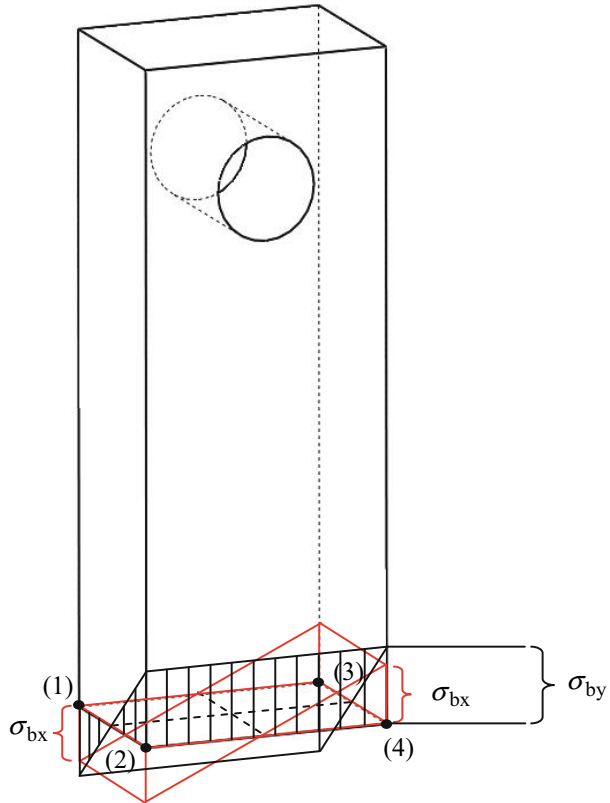
$$\sigma_{\text{resb2}} = \sigma_{\text{by}} - \sigma_{\text{bx}} = 3,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

An der Stelle (3) die resultierende Biegedruckspannung:

$$\sigma_{\text{resb3}} = \sigma_{\text{by}} - \sigma_{\text{bx}} = 3,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Und an der Stelle (4) die resultierende Biegezugspannung:

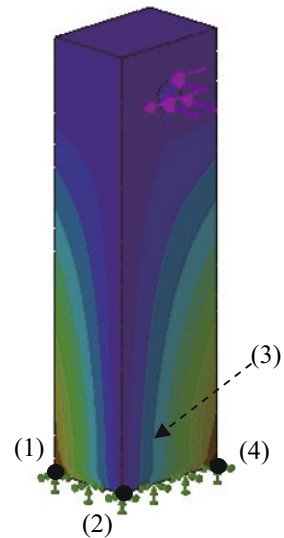
$$\sigma_{\text{resb4}} = \sigma_{\text{bx}} + \sigma_{\text{by}} = 77,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



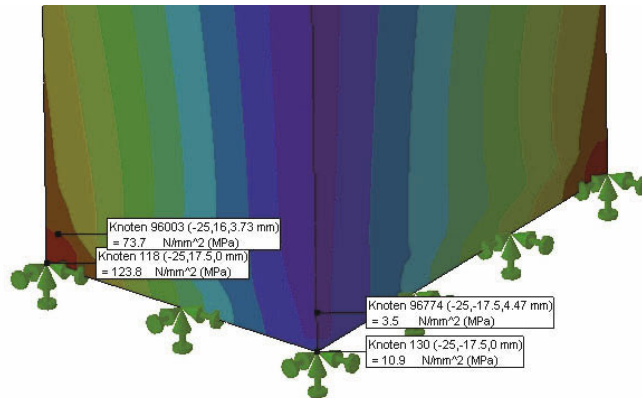
Jetzt folgt die **FEM-Analyse** zu dieser Aufgabe:

1. Öffnen Sie das Bauteil (FlachstahlBiegBieg.sldprt).
2. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
3. Definieren Sie die Feste Einspannung.
4. Definieren Sie die Kräfte $F_x = 2750 \text{ N}$ und $F_y = 3629 \text{ N}$.
5. Vernetzen Sie mit Elementgröße 3 mm.
6. Führen Sie die Studie aus.
7. Interpretation der Ergebnisse:

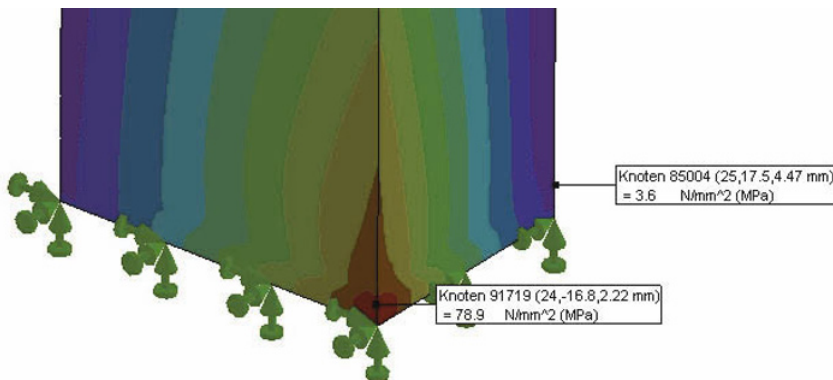
Im nebenstehenden Bild sieht man die Spannungsverteilung im gesamten Flachstahl. Mit **Sondieren** misst man die Von-Mises-Spannungswerte an den Stellen (1)–(4). Da die feste Einspannung unendlich starr ist und an den scharfen Kanten Spannungssingularitäten auftreten, dürfen die Werte nicht unmittelbar an der Ecke des Flachstahls sondiert werden. Beim Messen von Spannungswerten **An Position** können nur vorhandene Knotenpunkte gewählt werden.



Weiter unten wird gezeigt, wie man die Spannungswerte von ganzen Elementen bestimmt.



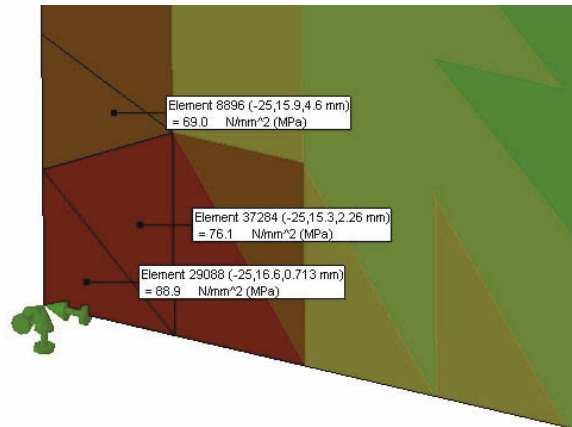
In der Nähe von Stelle (1) findet man z. B. den Wert $73,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, welcher dem analytischen Wert $77,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ziemlich nahe kommt. Der Spannungswert $123,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ im Eckpunkt darf nicht berücksichtigt werden (Spannungssingularität). Dasselbe gilt für die Stelle (2). Auch die Werte an den Stellen (3) und (4) stimmen gut überein.



Nun kann man mit Rechtsklick auf **Spannung1-Definition bearbeiten** unter Erweiterte Optionen **Elementwerte** aktivieren.

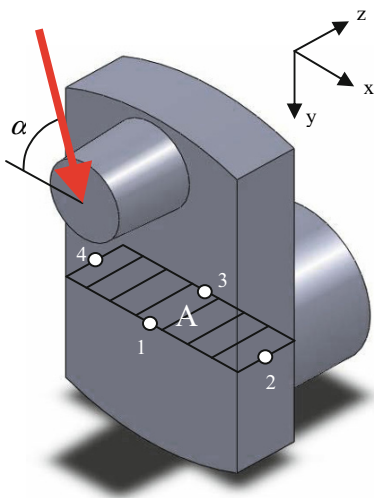


Die Spannungsdarstellung sieht dann bei Stelle (1) folgendermaßen aus. Beim Sondieren werden Mittelwerte der Von-Mises-Spannung pro Element angezeigt.



3.4 Kurbelwange mit Biegung, Druck, Abscheren und Torsion

Die unten dargestellte Kurbelwange aus S235 wird durch die Kraft $F = 20\,000\text{ N}$ unter einem Winkel $\alpha = 60^\circ$ zur Horizontalen belastet. Bestimmen Sie die Von-Mises-Vergleichsspannung in der Querschnittsfläche A an den Stellen 1–4.

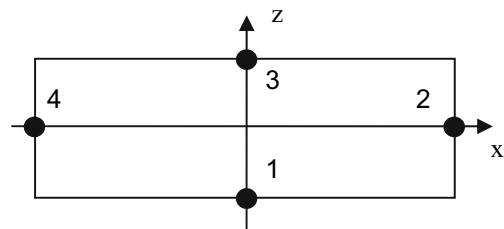


Lösung:

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 17\,320,5\text{ N}$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 10\,000\text{ N}$$

Es wirken im Querschnitt A:



a) Normalkraft F_y

→ Druckspannung σ_d

b) Querkraft F_x

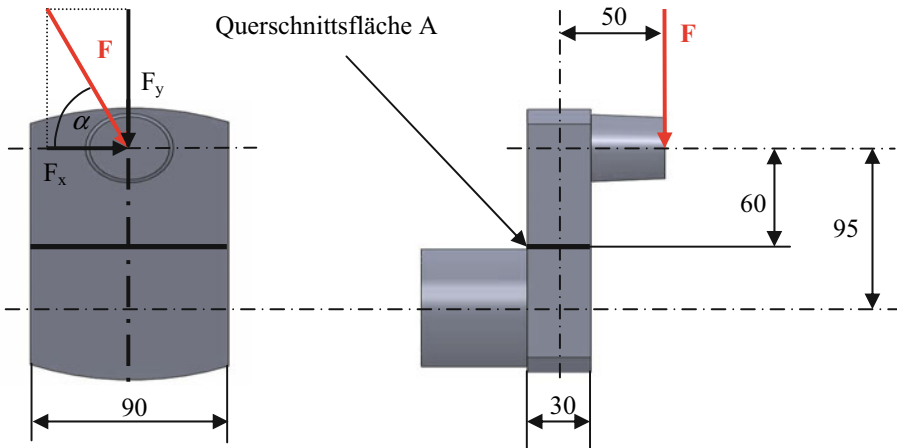
→ Abscherspannung τ_a

c) Biegemoment $M_{bx} = F_y \cdot 50\text{ mm}$

→ Biegespannung σ_{b2-4}

d) Biegemoment $M_{bz} = F_x \cdot 60\text{ mm}$

→ Biegespannung σ_{b1-3}

e) Torsionsmoment $M_t = F_x \cdot 50 \text{ mm}$ → Torsionsspannung τ_t 

Es werden nun alle Spannungen einzeln berechnet und anschließend mit der Festigkeitshypothese nach Von-Mises zu einer Vergleichsspannung zusammengefasst.

a) Druckspannung
$$\sigma_d = \frac{F_y}{A} = \frac{17\,320,5 \text{ N}}{90 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}} = 6,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

b) Abscherspannung
$$\tau_a = \frac{F_x}{A} = \frac{10\,000 \text{ N}}{90 \text{ mm} \cdot 30 \text{ mm}} = 3,7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Hier handelt es sich um die Nennspannung. In der Literatur findet man für den den Rechteckquerschnitt die Formel:

$$\tau_{\text{amax}} = \frac{3}{2} \cdot \tau_a = 5,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

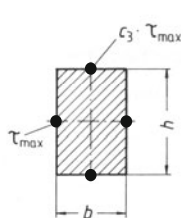
Diese wirkt an den Stellen 1 und 3.

c) Biegespannung Stellen 2 und 4
$$\sigma_{b2-4} = \frac{M_{bx}}{W_x} = \frac{F_y \cdot 50 \text{ mm}}{\frac{90 \text{ mm} \cdot (30 \text{ mm})^2}{6}} = 64,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

d) Biegespannung Stellen 1 und 3
$$\sigma_{b1-3} = \frac{M_{bz}}{W_z} = \frac{F_x \cdot 60 \text{ mm}}{\frac{30 \text{ mm} \cdot (90 \text{ mm})^2}{6}} = 14,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

e) Torsionsspannung:

Zuerst berechnen wir das Widerstandsmoment nach [1]: $\frac{h}{b} = \frac{90 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = 3$

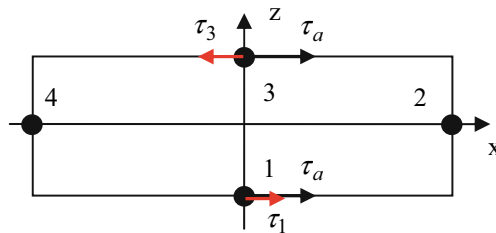


	I_t $c_1 h b^2$		W_t $c_2 h b^2$		Voraussetzung : $h/b \geq 1$ $\tau = 0$ in den Ecken					
h/b	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞	
c_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,298	0,307	0,312	0,333	
c_2	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,312	0,333	
c_3	1,0	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743	

Widerstandsmoment: $W_{t1-3} = c_2 \cdot h \cdot b^2 = 0,267 \cdot 90 \text{ mm} \cdot (30 \text{ mm})^2 = 21\,627 \text{ mm}^3$

Torsionsspannungen an Stellen 1 und 3 $\tau_{\max} = \tau_{t1-3} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{F_x \cdot 50 \text{ mm}}{21\,627 \text{ mm}^3} = 23,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Torsionsspannungen an Stellen 2 und 4 $\tau_{t2-4} = c_3 \cdot \tau_{t1-3} = 0,753 \cdot 23,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 17,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$



Aus den oben berechneten Spannungswerten können nun die Vergleichsspannungen nach Von-Mises an den Stellen 1–4 berechnet werden (Beachte: Druckspannungen mit Minus!)

z. B. Stelle 1: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_{\text{res}}^2 + 3 \cdot \tau_{\text{res}}^2} = \sqrt{(\sigma_b + \sigma_d)^2 + 3 \cdot (\tau_{t1-3} + \tau_a)^2}$

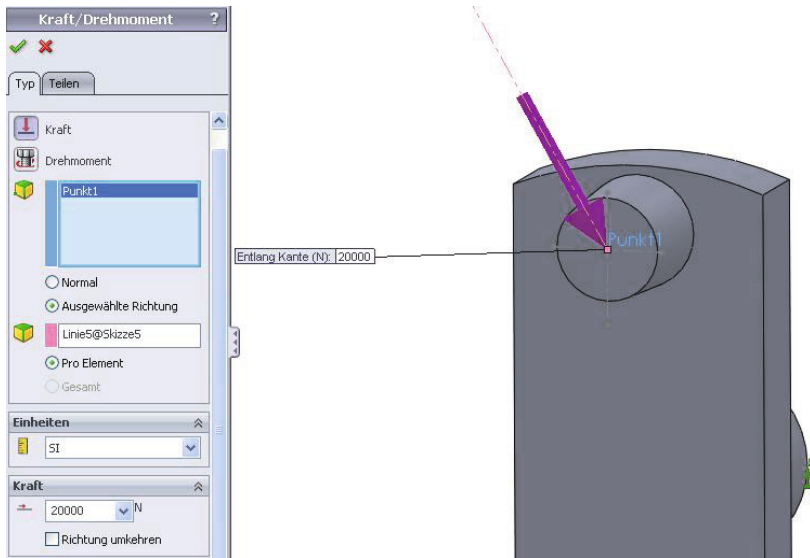
$$\sigma_V = \sqrt{\left(-6,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 64,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)^2 + 3 \cdot \left(23,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} + 5,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right)^2} = 86 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Alle Werte in einer Tabelle zusammengestellt:

Stelle	Druckspannung σ_d in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Biegespannung σ_b in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Torsionsspannung τ_t in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Abscherspannung τ_a in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Vergleichsspannung σ_V in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
1	-6,4	-64,2	23,1	5,6	86
2	-6,4	-14,8	17,4	0	37
3	-6,4	64,2	-23,1	5,6	65
4	-6,4	14,8	17,4	0	31

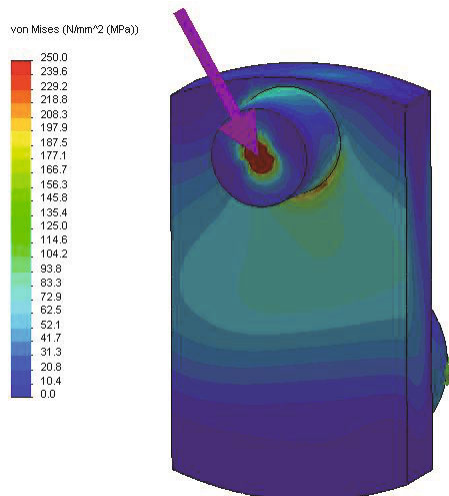
FEM-Analyse:

1. Öffnen Sie das Bauteil (Kurbelwange.sldprt).
2. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
3. Definieren Sie eine Feste Einspannung.
4. Definieren Sie die Kraft $F = 20 \text{ kN}$.



5. Vernetzen Sie mit Elementgröße 4 mm.
6. Führen Sie die Studie aus.

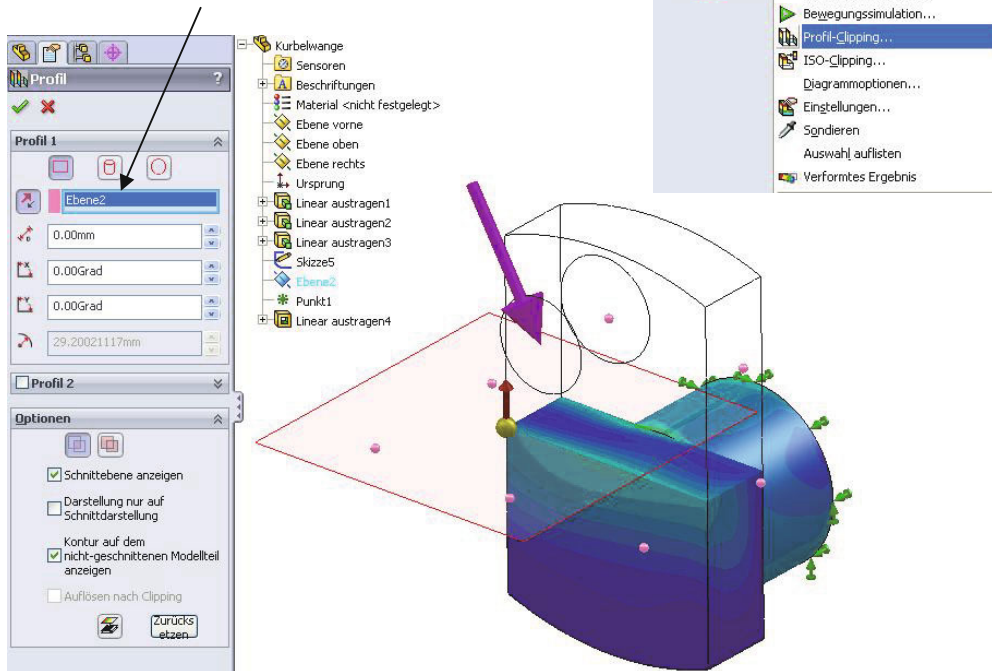
So sieht das Spannungsergebnis aus. Uns interessieren die Spannungen in der Querschnittsfläche A.



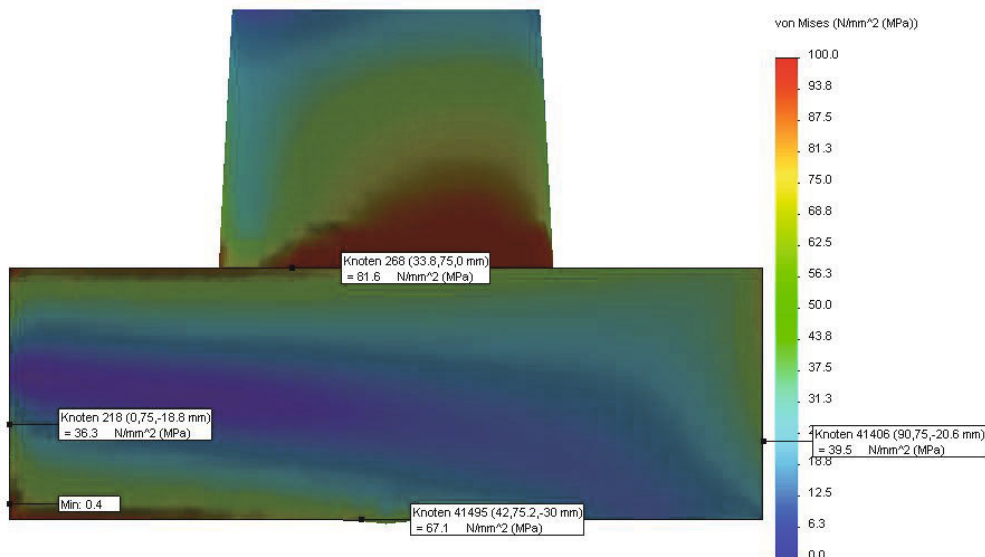
Bei den hohen Spannungen am Kraftangriffspunkt handelt es sich um Spannungssingularitäten. Sie sind nicht weiter von Bedeutung.

Klicken Sie dazu mit der rechten Maustaste auf **Spannung 1** und wählen Sie **Profil-Clipping**.

Wählen Sie die **Ebene 2** bei Profil 1.



Anschließend **Sondieren** Sie ungefähr die vier Punkte 1–4.



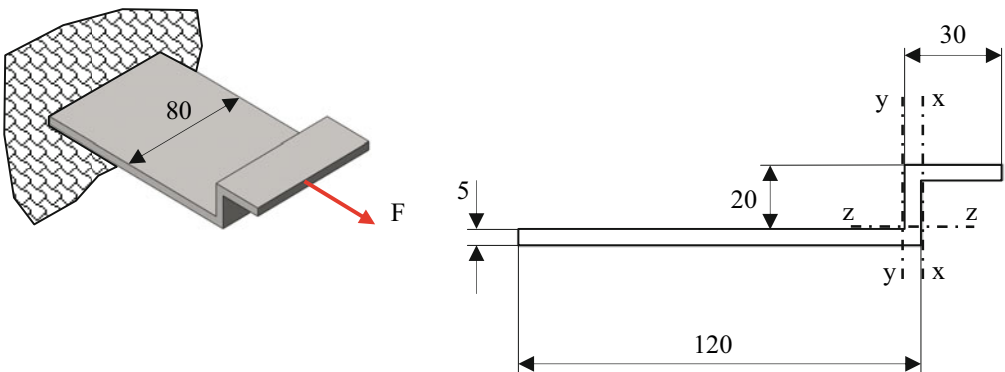
Bei den oben berechneten Werten handelt es sich um Nennspannungen. Bei deren Berechnungen werden gewisse Einflüsse nicht berücksichtigt. Beim Sondieren wird gezeigt, dass es in der Nähe der berechneten Stellen 1-4 in der Simulation Spannungswerte gibt, die einigermaßen übereinstimmen.

Berechnete und simulierte Werte in einer Tabelle gegenübergestellt:

Stelle	Berechneter Wert Vergleichsspannung σ_V in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Simulierter Wert Von-Mises-Spannung in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Abweichung in %
1	86	82	4,7
2	37	39	5,4
3	65	67	3
4	31	36	16

3.5 Übungen

1. Das z-förmig gebogene Blech (S235) ist links angeschweißt und wird rechts mit der Kraft $F = 900 \text{ N}$ belastet. Wie groß sind die Spannungen in den Schnitten x-x, y-y und z-z am skizzierten Blech? Vergleichen Sie die analytischen Werte mit den Simulationswerten.



2. Ein Kurbelzapfen (C40E Vergütungsstahl) wird nach Skizze durch $F = 8 \text{ kN}$ belastet. Wie groß sind die Spannungen im Schnitt x-x (Abscherspannung vernachlässigen)? Vergleichen Sie die analytischen Werte mit den Simulationswerten.

