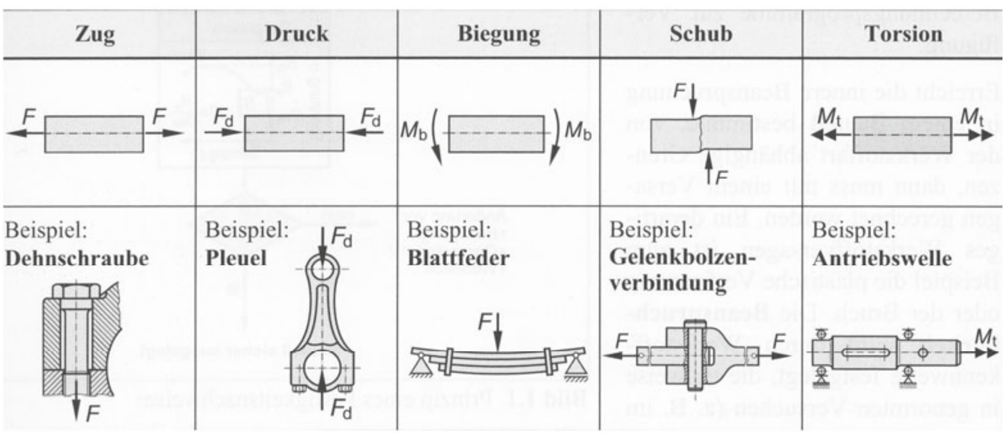
2 Beispiele zu den Grundbeanspruchungsarten

Nachdem wir die Grundlagen der FEM-Analyse und die grundsätzliche Arbeit mit SolidWorks Simulation kennen gelernt haben, kommen wir zur Anwendung und Vertiefung dieses Wissens. FEM-Simulationen eignen sich sehr gut dazu, die Theorien der Festigkeitslehre besser zu verstehen. Bei analytischen Berechnungen muss man immer zuerst eine Stelle im Bauteil wählen, dort das innere Kräftesystem und die wirkenden Spannungsarten bestimmen und berechnen. Erst im Ergebnis einer FEM-Analyse sieht man aber den Spannungsverlauf im gesamten Bauteil. Dieser Spannungsverlauf ermöglicht es, den Kraftfluss in einer Konstruktion besser zu verstehen. Oftmals findet man die kritischen Stellen in einem Bauteil erst, nachdem man sich über den Kraftfluss eingehend Gedanken gemacht hat. In diesem Kapitel wird anhand von sehr einfachen Beispielen zu den Grundbeanspruchungsarten die Anwendung von SolidWorks Simulation geübt. Weiter soll das Verständnis für die Grundlagen der Festigkeitslehre gefördert werden.

Aus der Festigkeitslehre kennt man die fünf Grundbeanspruchungsarten:

- Zug
- Druck
- Biegung
- Schub
- Torsion.

Hier eine Zusammenstellung der Grundbeanspruchungsarten nach [3]:



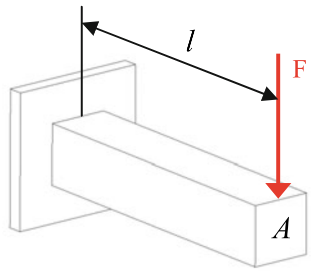
Zug	Druck	Biegung	Schub	Torsion
Beispiel: **Dehnschraube**	Beispiel: **Pleuel**	Beispiel: **Blattfeder**	Beispiel: **Gelenkbolzenverbindung**	Beispiel: **Antriebswelle**

Es folgen nun einige Beispiele zur Biegung und Torsion. Zuerst wird immer die „Handrechnung" durchgeführt. Dann folgt die FEM-Analyse mit einer Interpretation und einem Vergleich der Ergebnisse.

M. Brand, *Grundlagen FEM mit SolidWorks 2010*, DOI 10.1007/978-3-8348-9838-8_2,

2.1 Einseitig eingespannter Biegebalken mit Einzellast

Wir berechnen am dargestellten, einseitig eingespannten Biegebalken an der Einspannstelle die auftretenden Biegespannungen und die maximale Durchbiegung am anderen Ende.



Gegebene Werte:

$F = 10\,000\ \text{N}$, $l = 200\ \text{mm}$,

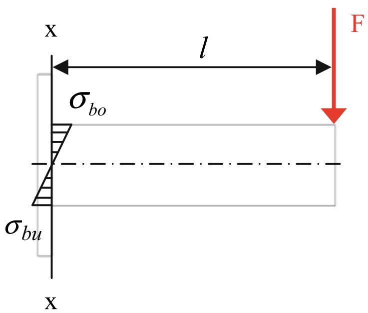
$A = h \cdot h = 40\ \text{mm} \cdot 40\ \text{mm} = 1600\ \text{mm}^2$

Material: S275

E-Modul: $210\,000\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Lösung:

An der Einspannstelle x-x wirkt eine Biege- und eine Schubspannung (wird hier vernachlässigt). In der obersten Randfaser wirkt die Zugspannung σ_{bo}, in der untersten Randfaser die Druckspannung σ_{bu}.



Da es sich um ein symmetrisches Bauteil handelt, sind beide Spannungen gleich groß. Sie lassen sich folgendermaßen berechnen:

Biegespannung

$$\sigma_{\text{b}} = \frac{M_{\text{b}}}{W} = \frac{F \cdot l}{\frac{h^3}{6}} = \frac{6 \cdot 10\,000\ \text{N} \cdot 200\ \text{mm}}{(40\ \text{mm})^3} = 187{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

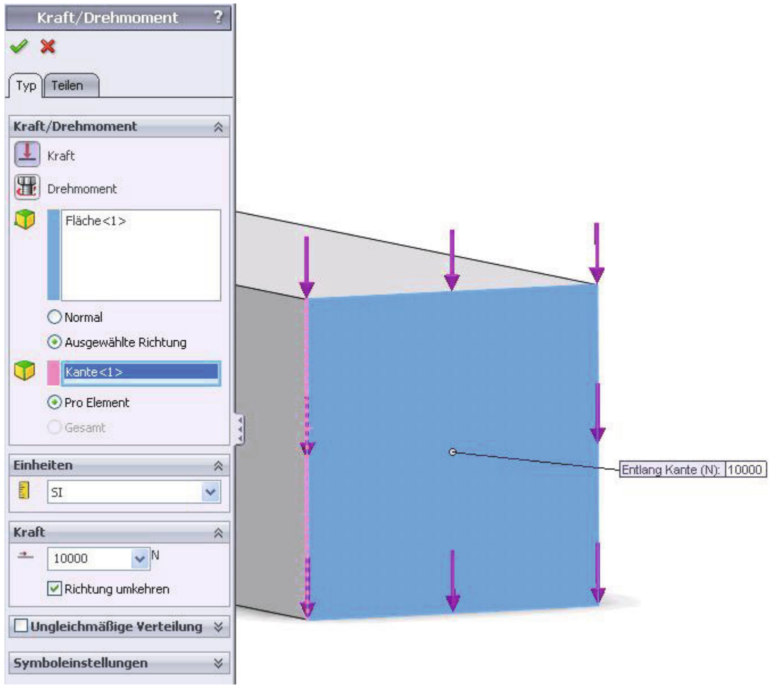
Die maximale Durchbiegung kann ebenfalls einfach berechnet werden:

$$f_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{10\,000\ \text{N} \cdot (200\ \text{mm})^3}{3 \cdot 210\,000\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{(40\ \text{mm})^4}{12}} = 0{,}595\ \text{mm}$$

Dabei berechnet man das Flächenmoment 2. Grades mit der Formel: $I = \dfrac{h^4}{12}$

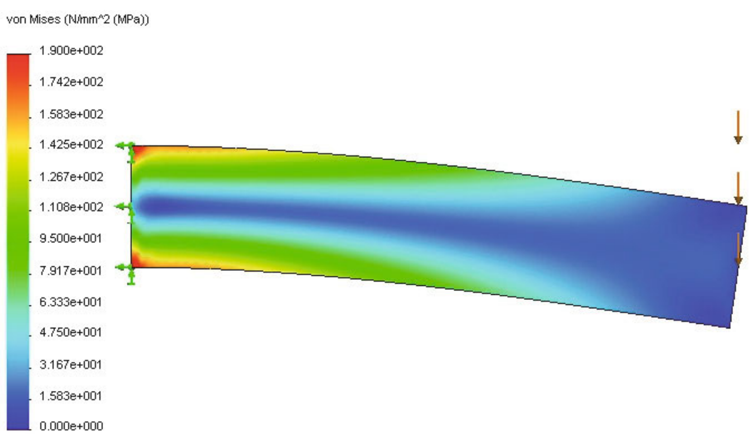
Überprüfen wir die erhaltenen Resultate mit einer **FEM-Analyse**:

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Biegebalken.sldprt).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
4. Definieren Sie die Feste Einspannung.
5. Definieren Sie die Kraft.



6. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm .
7. Führen Sie die Studie aus und interpretieren Sie die Ergebnisse.

   Zuerst die Spannungsverteilung:

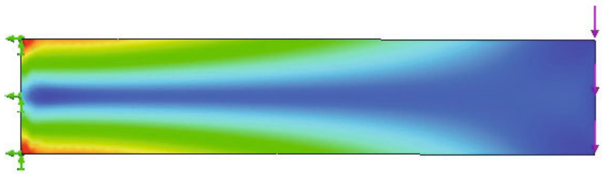


Bei der dargestellten Spannungsverteilung sieht man, dass die neutrale Faser in der Mitte des Bauteiles praktisch spannungsfrei ist. In den beiden äußersten Randfasern werden sich die gleichen Spannungsbeträge aufbauen.

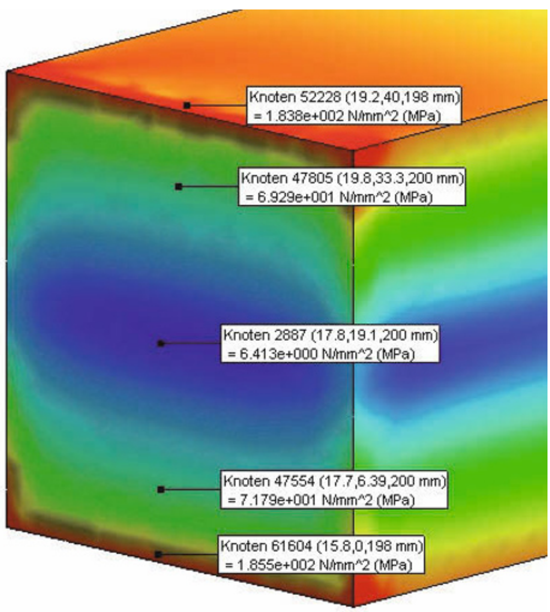
Wenn die übermäßig dargestellte Verformung stört, kann man das mit Rechtsklick auf ***Spannung 1*** (Definition bearbeiten) ändern.

Aktivieren Sie bei Modellverformung ***Wahrer Maßstab***.

Obige Darstellung sieht dann wie folgt aus:

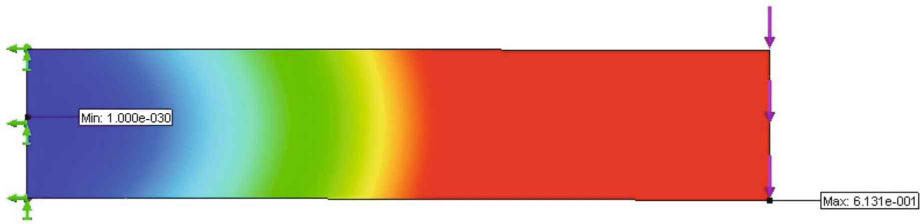


Messen Sie nun mit ***Sondieren*** einige Spannungswerte an der Einspannstelle.



Der oberste sondierte Wert von $184\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ liegt nahe beim berechneten Wert von $187{,}5\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ und entspricht der Biegezugspannung. Man muss aber berücksichtigen, dass dies der Von-Mises-Spannungswert ist. In diesem sind auch die vorhandenen Schubspannungen, die in diesem Fall sehr klein sind, enthalten. In der Mitte der Einspannstelle nehmen die Spannungswerte ab, und dann in Richtung zur unteren Kante als Biegedruckspannung wieder zu. Der unterste Wert von $186 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ entspricht der größten Biegedruckspannung. An den scharfen Kanten würde man noch höhere Spannungswerte finden, da dort Spannungssingularitäten entstehen.

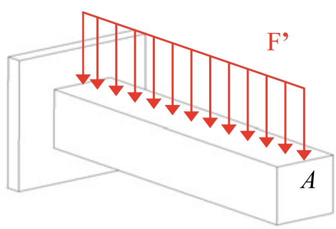
Nun zur Verformung:



Der maximale Verformungswert liegt bei $0{,}61\ \text{mm}$. Dieser Wert liegt nahe am analytisch berechneten Wert $0{,}595\ \text{mm}$.

2.2 Einseitig eingespannter Biegebalken mit Streckenlast

Auf denselben einseitig eingespannten Biegebalken wirkt nun eine auf die ganze Länge gleichmäßig verteilte Streckenlast. Auch hier sollen die an der Einspannstelle wirkenden Biegespannungen und die maximale Durchbiegung berechnet werden.



Gegebene Werte:

Streckenlast $F' = 50 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}}$, Balkenlänge $l = 200\ \text{mm}$,

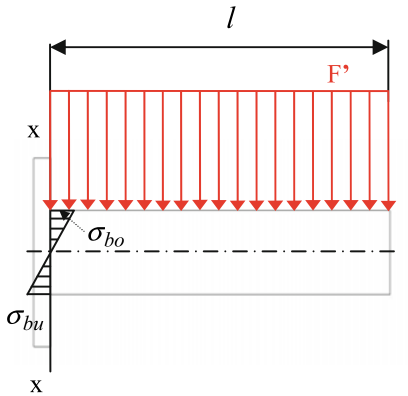
$A = 40\ \text{mm} \cdot 40\ \text{mm} = 1600\ \text{mm}^2$

Material: S275

E-Modul: $210\,000 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Lösung:

An der Einspannstelle x-x wirkt eine Biegespannung. In der obersten Randfaser wirkt die Zugspannung σ_{bo} und in der untersten Randfaser die Druckspannung σ_{bu}.



Da es sich um ein symmetrisches Bauteil handelt, sind beide Spannungen gleich groß. Sie lassen sich folgendermaßen berechnen:

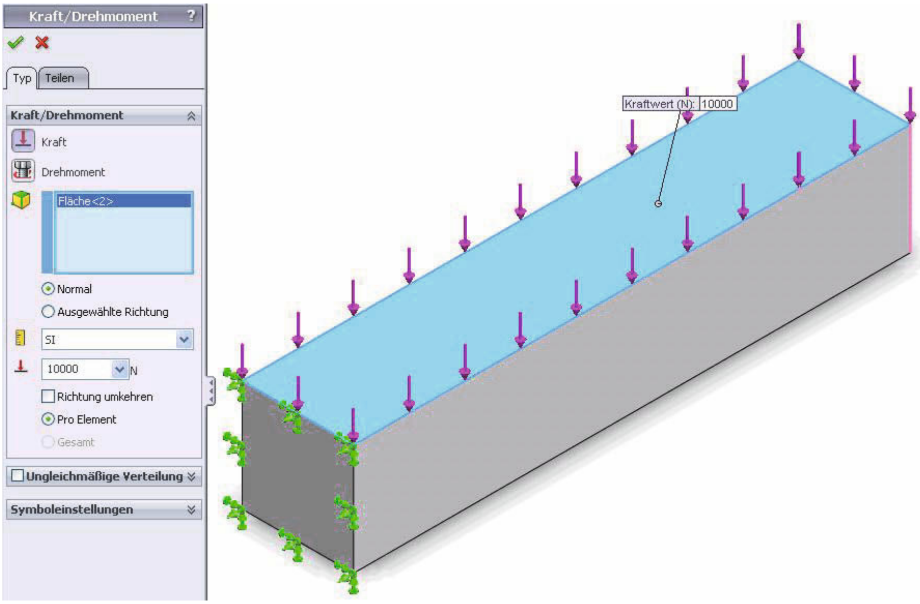
$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{F' \cdot l \cdot \frac{l}{2}}{\frac{h^3}{6}} = \frac{6 \cdot 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \cdot 200\,\mathrm{mm} \cdot \frac{200\,\mathrm{mm}}{2}}{(40\,\mathrm{mm})^3} = 93{,}8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Die maximale Durchbiegung kann ebenfalls einfach berechnet werden:

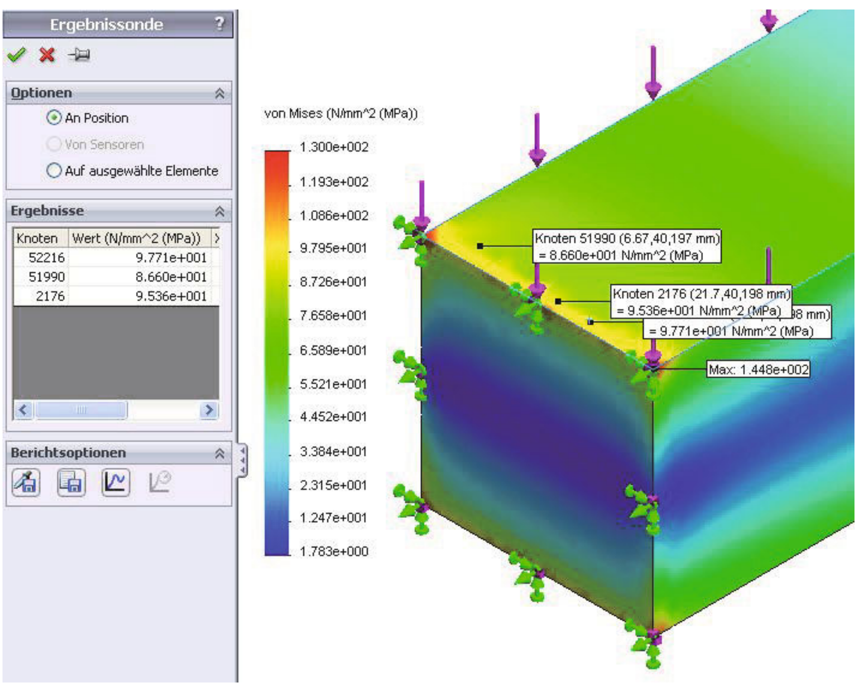
$$f_{\max} = \frac{F' \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \cdot (200\,\mathrm{mm})^4}{8 \cdot 210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot \frac{(40\,\mathrm{mm})^4}{12}} = 0{,}223\,\mathrm{mm}$$

Überprüfen wir die erhaltenen Resultate mit einer **FEM-Analyse**:

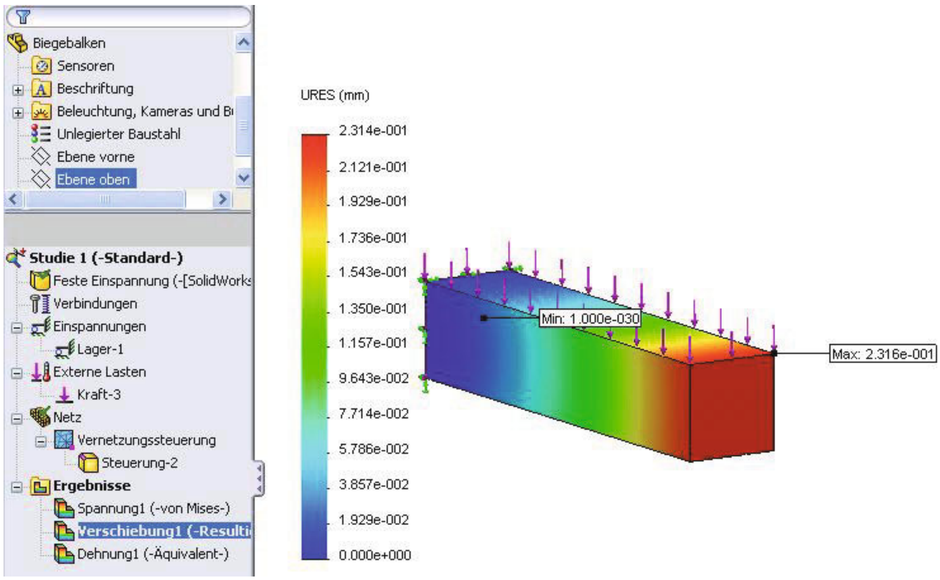
1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Biegebalken.sldprt).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
4. Definieren Sie die Feste Einspannung.
5. Definieren Sie die Kraft (siehe nächste Seite).
6. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm.
7. Führen Sie die Studie aus.



Interpretieren Sie die Ergebnisse. Zuerst die Spannungswerte – sie entsprechen den berechneten Werten ziemlich gut.



Die maximal simulierte Verschiebung liegt bei $0{,}232\ \text{mm}$, was ebenfalls sehr nahe am berechneten Wert liegt.



2.3 Vollwelle mit Torsionsmoment

Der dargestellte Torsionsstab wird mit einem Torsionsmoment $M_t = 1\,000\ \text{Nm}$ belastet. Es sind die maximale Torsionsspannung und der Verdrehwinkel zu bestimmen.

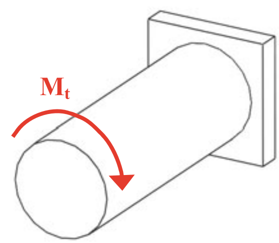
Gegebene Werte:

Durchmesser $d = 44\ \text{mm}$

Stablänge $l = 150\ \text{mm}$

Material: S275

Schubmodul: $G = 81\,000\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$



Lösung:

Für die Torsionsspannung an der Einspannstelle erhält man:

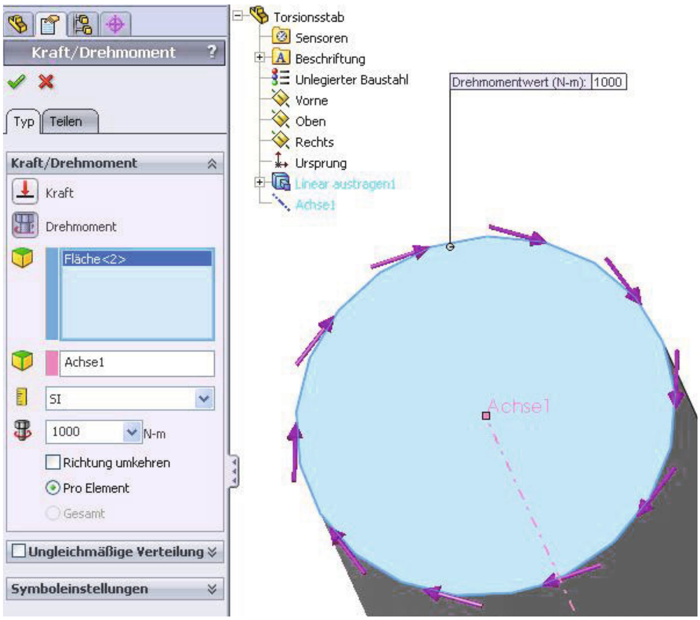
$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{1\,000\,000\ \text{Nmm}}{\dfrac{\pi \cdot d^3}{16}} = 59{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Der Verdrehwinkel wird:

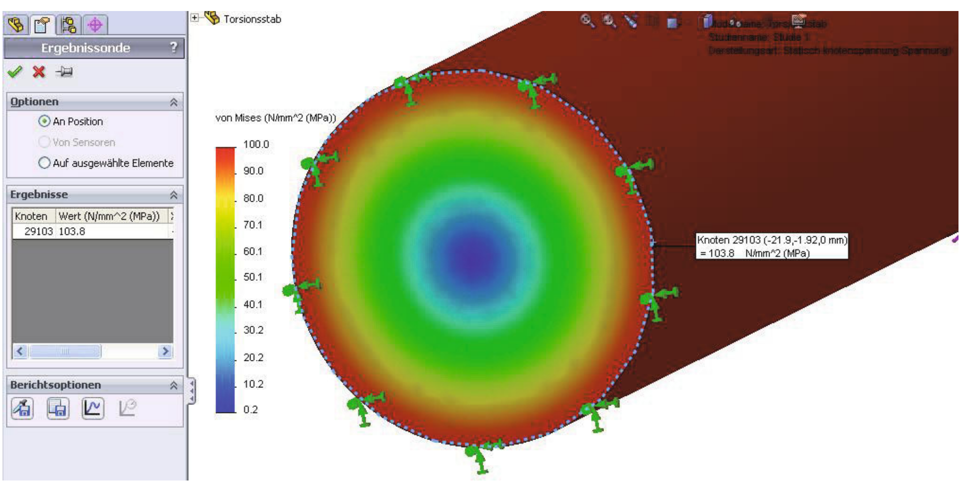
$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{1\,000\,000\ \text{Nmm} \cdot 150\ \text{mm}}{81\,000\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \dfrac{\pi \cdot (44\ \text{mm})^4}{32}} \cdot \frac{180°}{\pi} = 0{,}288°$$

FEM-Analyse:

1. Öffnen Sie das Bauteil (Torsionsstab.sldprt).
2. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
3. Definieren Sie die Feste Einspannung.
4. Definieren Sie das Drehmoment.



5. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm .
6. Führen Sie die Studie aus und interpretieren Sie die Spannungswerte.

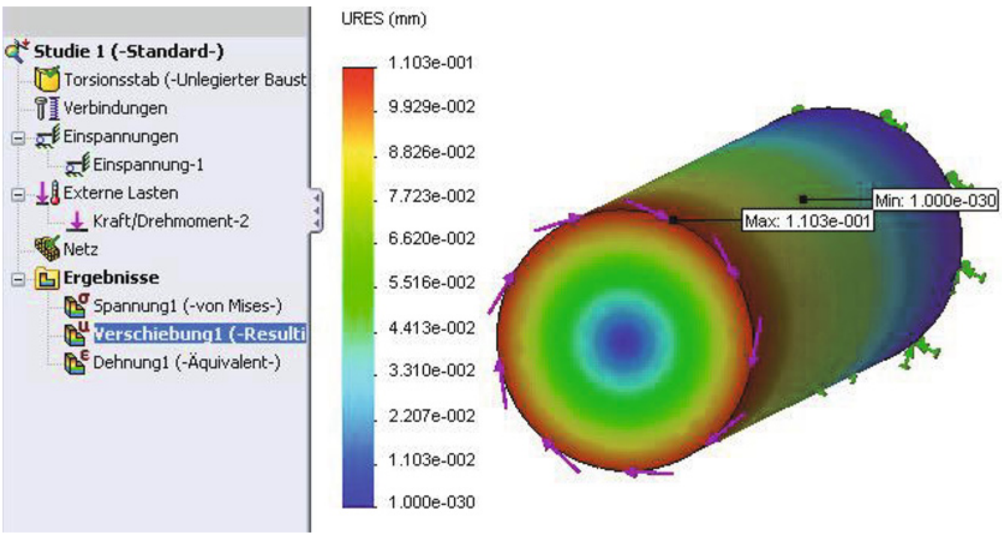


Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt $103{,}8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Wenn man die obige Torsionsspannung mit der Festigkeitshypothese Von-Mises in eine Normalspannung mit $\sigma_\mathrm{b} = 0\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ umrechnet, erhält man:

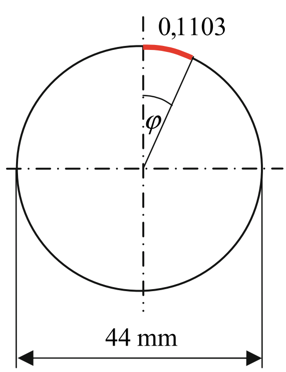
$$\sigma_\mathrm{V} = \sqrt{\sigma_\mathrm{b}^2 + 3\tau_\mathrm{t}^2} = \sqrt{3 \cdot (59{,}8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2})^2} = 103{,}6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2},$$

was sehr gut mit dem simulierten Wert übereinstimmt.

Bei der Verschiebung erhält man mit ***Sondieren*** den Maximalwert $0{,}1103\ \mathrm{mm}$.



Um diesen Wert mit dem berechneten Verdrehwinkel vergleichen zu können, muss man ihn noch umrechnen.

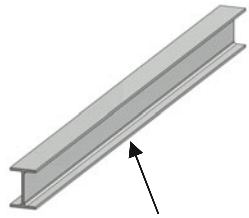


$$\frac{0{,}1103\ \mathrm{mm}}{\pi \cdot 44\ \mathrm{mm}} = \frac{\varphi}{360°} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0{,}287°$$

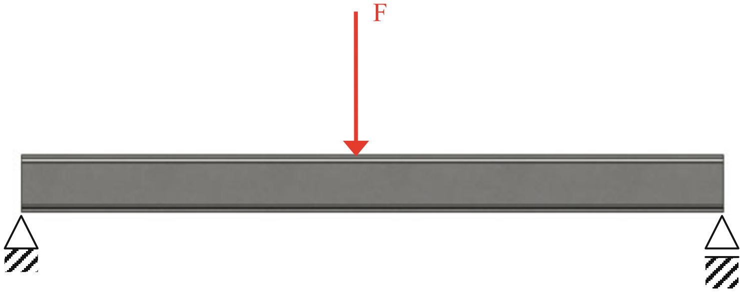
Auch hier eine sehr gute Übereinstimmung zwischen berechnetem und simuliertem Wert.

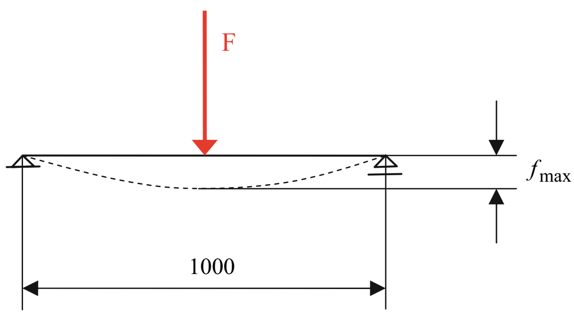
2.4 Stützträger mit Einzellast

Der dargestellte Träger IPE 80 (S235) wird in der Mitte mit einer Kraft $F = 10\,000\ \text{N}$ belastet. Auf der linken Seite befindet sich ein Festlager und auf der rechten Seite ein Loslager. Es sind die maximalen Biegespannungen und die maximale Durchbiegung (ohne Berücksichtigung des Eigengewichts) zu berechnen und mit einer Simulation zu überprüfen.



IPE 80





Lösung:

Zuerst berechnen wir die maximale Biegespannung. Sie tritt in der Mitte des Trägers auf. Die Flächen- und Widerstandsmomente entnehmen Sie geeigneten Tabellen.

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{\frac{F \cdot l}{4}}{W} = \frac{\frac{10\,000\ \text{N} \cdot 1000\ \text{mm}}{4}}{20 \cdot 10^3\ \text{mm}^3} = 125\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die maximale Durchbiegung kann ebenfalls einfach berechnet werden:

$$f_{max} = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{10\,000\ \text{N} \cdot (1000\ \text{mm})^3}{48 \cdot 210\,000\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 80.1 \cdot 10^4\ \text{mm}^4} = 1{,}239\ \text{mm}$$

Die Simulation wird zuerst mit der Volumenkörper-Vernetzung durchgeführt. Dann wird zum Vergleich mit Balkenelement-Vernetzung simuliert. Wir werden sehen, dass die simulierten Werte auf beide Arten gut mit den berechneten Werten übereinstimmen. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass es oftmals mehrere Möglichkeiten gibt, die Randbedingungen wie Last- und Lagerdefinitionen festzulegen.

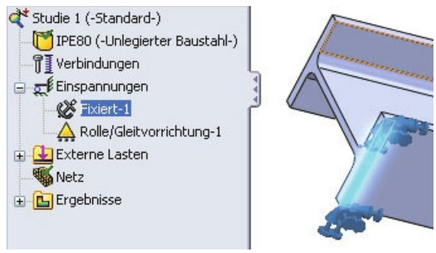
FEM-Analyse (Volumenkörper-Vernetzung, d. h. mit tetraedischen Volumenkörperelementen) – Versuch 1:

1. Öffnen Sie das Bauteil (Stützträger mit Einzellast.sldprt).

2. Erstellen Sie eine statische Studie.

3. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).

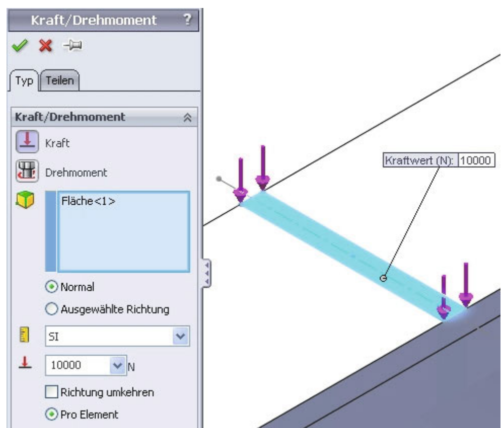
4. Definieren Sie das Festlager mit ***Fixierter Geometrie*** an der dargestellten Fläche. Dies ist eine vereinfachende Annahme, da ein Festlager als Gelenk wirkt. Die Fläche wurde über eine Trennlinie mit 5 mm Breite erstellt. Natürlich ist diese gewählte Breite ebenfalls eine Annahme. Man müsste detailliertere Informationen über die konstruktive Gestaltung der Lagerung haben.



5. Definieren Sie das Loslager mit ***Rolle/Gleitvorrichtung*** an der ebenfalls 5 mm breiten Fläche auf der gegenüberliegenden Seite.

6. Definieren Sie eine Kraft von $F = 10\,000\ \text{N}$ auf der Oberseite des Trägers auf der ebenfalls vorbereiteten Fläche.

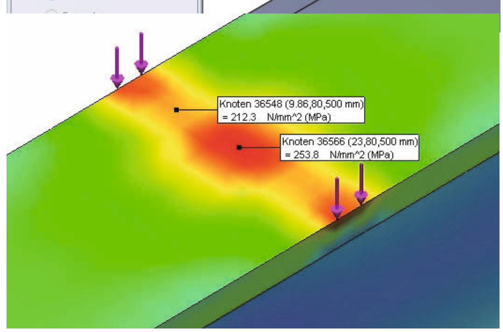
7. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm .



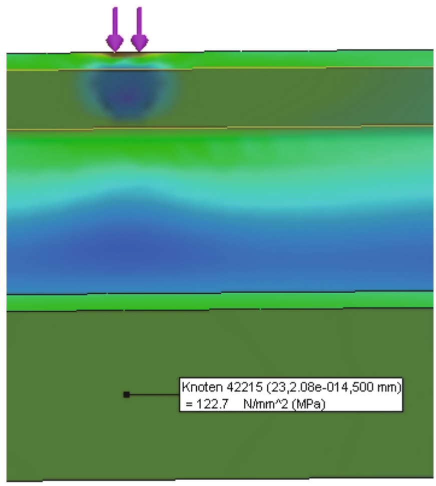
8. Führen Sie die Studie aus.

9. Interpretation der Ergebnisse:

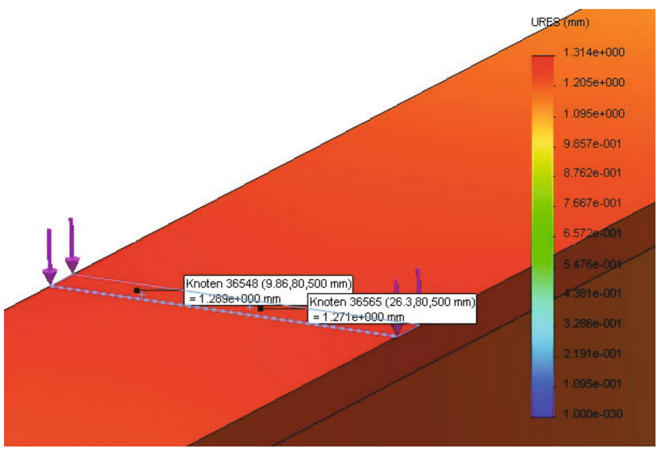
   Misst man mit ***Sondieren*** die Spannungen an der Oberseite, erhält man Von-Mises Spannungen (z. B. $\sigma_V = 253{,}8\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$), die weit über dem analytisch berechneten Wert liegen. Misst man die Spannungen an der Unterseite, stimmen sie sehr gut überein. Das liegt daran, dass an der Oberseite durch die Kraftdefinition auf die doch recht kleine Fläche Spannungssingularitäten entstehen.



Der unten sondierte Von-Mises-Spannungswert $123 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ liegt nahe beim oben berechneten Wert $\sigma_\mathrm{b} = 125 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$.



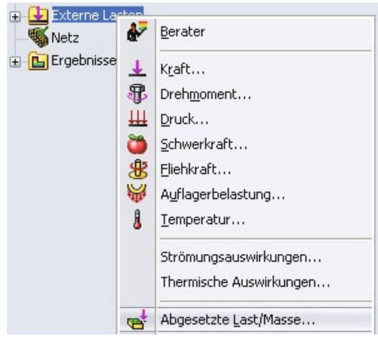
Für die Verformung erhält man mit ***Sondieren*** eine maximale Verformung von ca. 1,27...1,29 mm in der Balkenmitte. Der berechnete Wert 1,24 mm liegt sehr nahe am simulierten Wert.

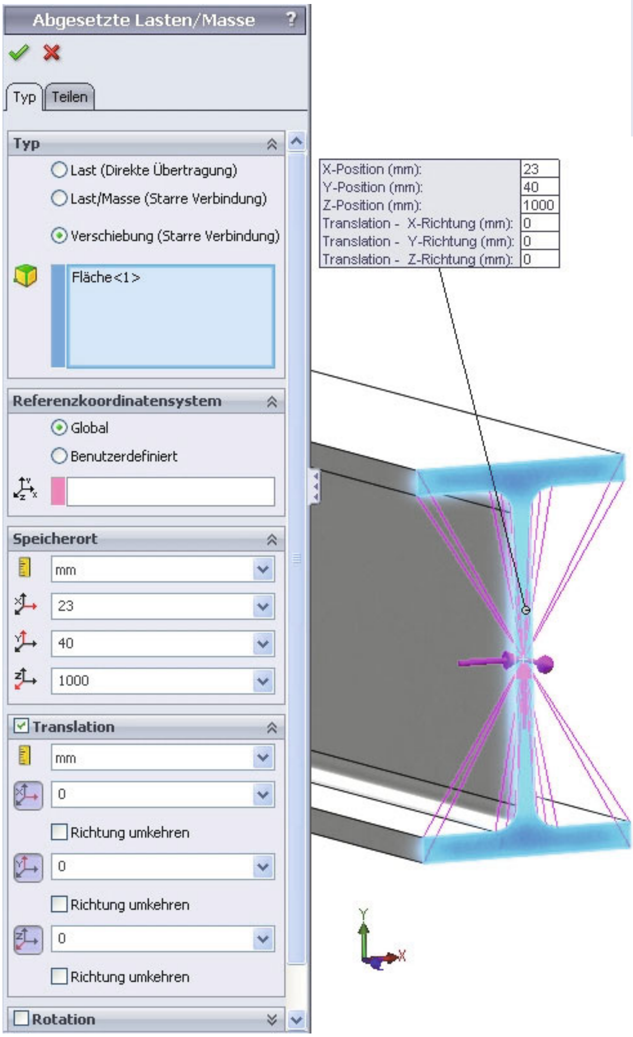


FEM-Analyse (Volumenkörper-Vernetzung, d. h. mit tetraedischen Volumenkörper-elementen) – Versuch 2:

Die Lagerdefinitionen kann man auch anders ausführen. Wir steigen bei der eben durchgeführten Simulation beim 4. Schritt ein und ändern wie folgt (Löschen Sie aber zuerst die bereits definierten Einspannungen):

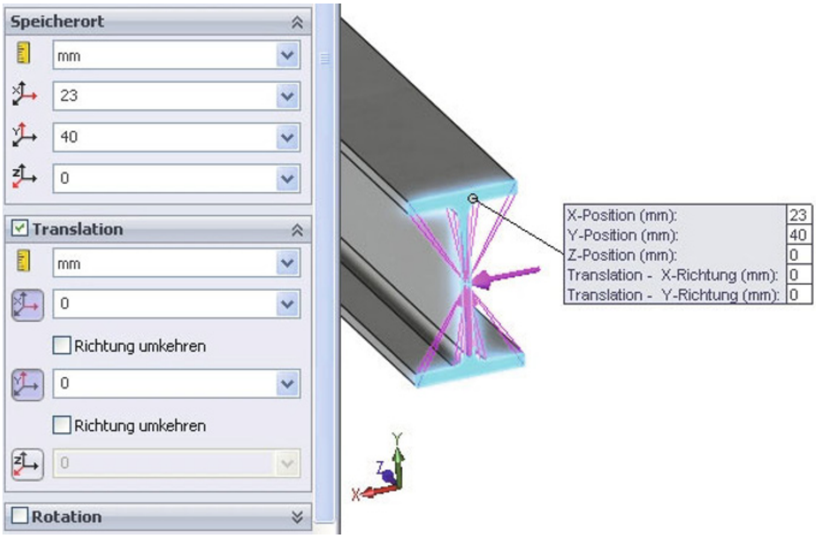
4. Wählen Sie in der Studie unter ***Externe Lasten*** mit Rechtsklick ***Abgesetzte Last/Masse***. Für das Festlager links müssen alle ***Translationen*** auf Null gesetzt werden (aktivieren Sie durch Anklicken). Die ***Rotationen*** sind möglich, deshalb lassen wir sie zu.



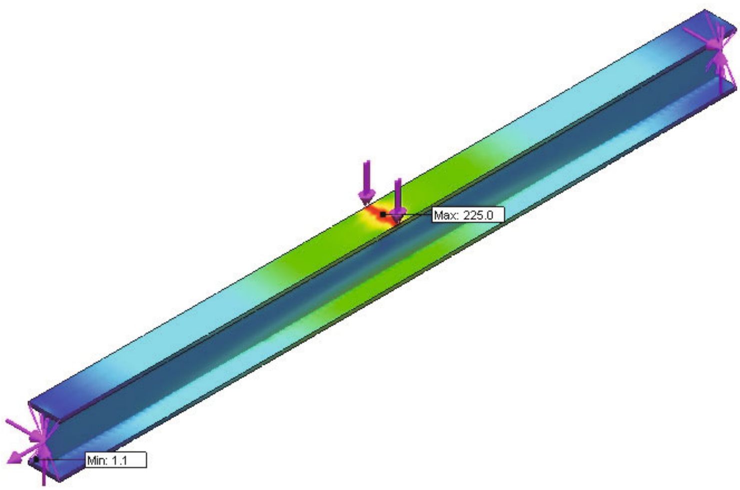


Die Position der ***Abgesetzten Last*** sollte sich im Schwerpunkt der Fläche befinden. Geben Sie deshalb die unter ***Speicherort*** dargestellten Werte ein. Sie beziehen sich auf den Ursprung des Trägers. Das heißt: Der Schwerpunkt der Fläche <1> hat die Koordinaten (23 mm/40 mm/ 1000 mm).

5. Für das Loslager rechts gehen Sie gleich vor. Nur beim Speicherort müssen Sie die folgenden Werte eingeben. Der Schwerpunkt dieser Fläche befindet sich nämlich in der x-y-Ebene. Die Translationen für die x- und y-Achsen sind wieder Null. Die Translation in z-Richtung soll aber ermöglicht werden. Die Rotationen sind um alle Achsen möglich.



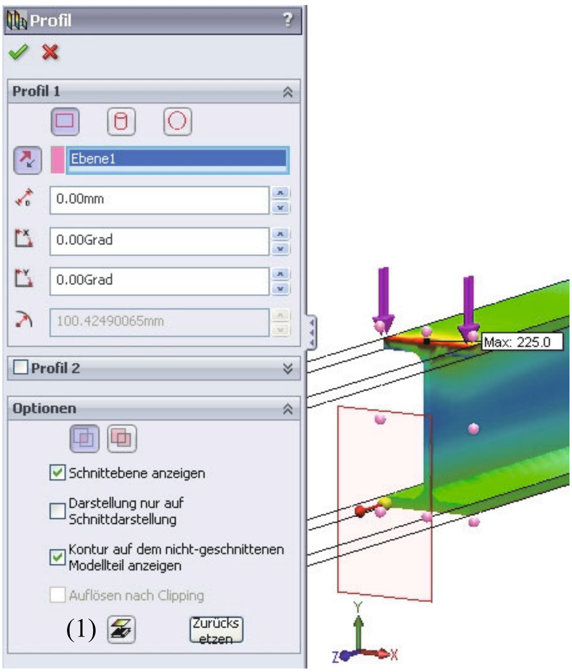
6. Die Kraft haben wir bereits definiert. Die Vernetzung kann ebenfalls übernommen werden. Führen Sie nun die Studie aus.
7. Interpretation der Ergebnisse:



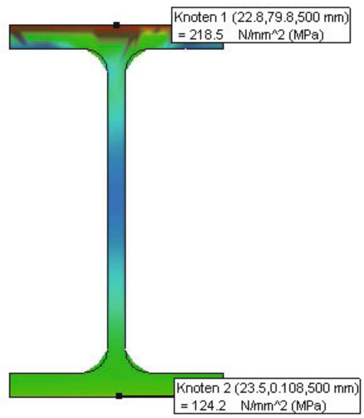
Man erkennt am linken Ende das Festlager, das alle drei Translationen einschränkt, und am rechten Ende das Loslager, das eine Bewegung in axialer Richtung zulässt. An der Krafteinleitungsstelle entstehen wieder Spannungssingularitäten, die keine weitere Bedeutung haben.

Um die Spannungen und Verformungen genau in der Mitte des Trägers sondieren zu können, kann man mit Rechtsklick auf Spannung1 ***Profil-Clipping*** anwählen.

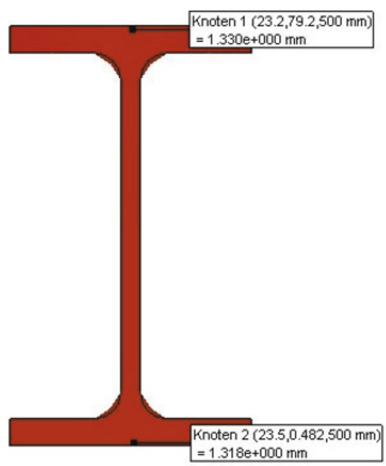
Wählen Sie die ***Ebene 1*** für den Schnitt.



Jetzt kann man mit ***Sondieren*** die Spannungswerte bestimmen.



An der Unterkante liegt der Spannungswert von 124,2 $\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ sehr nahe beim analytischen Wert $\sigma_b = 125\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Die simulierte Verformung $1{,}32...1{,}33\ \mathrm{mm}$ kann analog ermittelt werden. Sie weicht weniger als ein Zehntel Millimeter vom analytischen Wert ab.

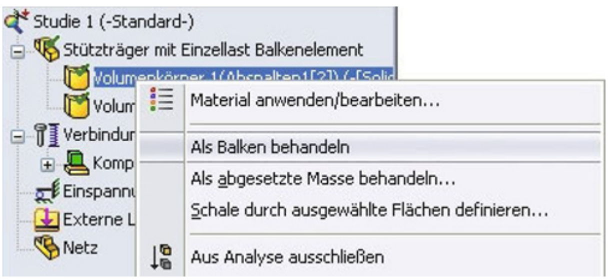


Um das ***Profil-Clipping*** wieder aufzuheben, müssen Sie das Menü nochmals öffnen und hier (1) aufheben.

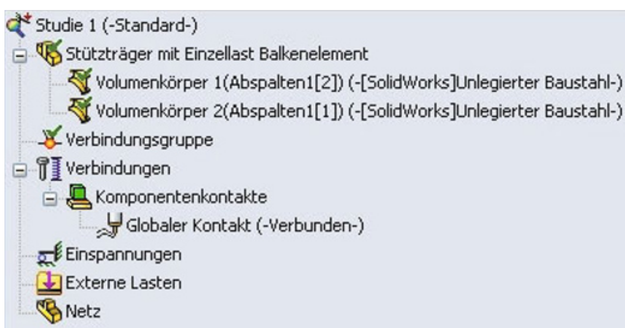
FEM-Analyse (Balken-Vernetzung, d. h. mit Balkenelementen):

SolidWorks Simulation verfügt auch über Balkenelemente. Im Folgenden wird gezeigt, wie man obige Simulation mit diesem Vernetzungselement durchführt.

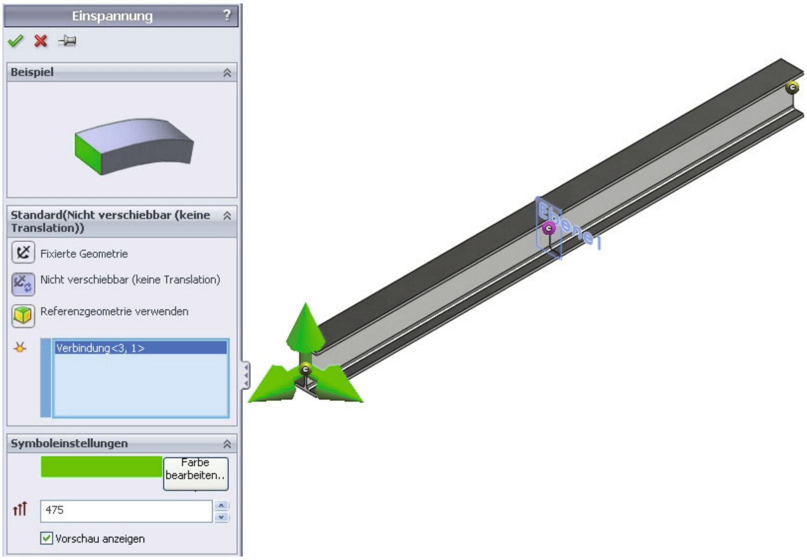
1. Öffnen Sie das Bauteil (Stützträger mit Einzellast Balkenelement.sldprt). Beim Betrachten des Modells fällt auf, dass es keine ***Trennlinie*** mehr gibt. Der Träger wurde aber durch ***Abspalten*** mit ***Ebene 1*** in zwei Volumenkörper aufgeteilt. Dieses Abspalten ist für die Vernetzung mit Balkenelementen und das Definieren von Lasten erforderlich.
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Wählen Sie für beide Volumenkörper ***Als Balken behandeln*** und anschließend ***Verbindungsgruppe Bearbeiten***. Stellen Sie auf ***Alle*** bei ***Balken suchen*** und dann ***Berechnen***.

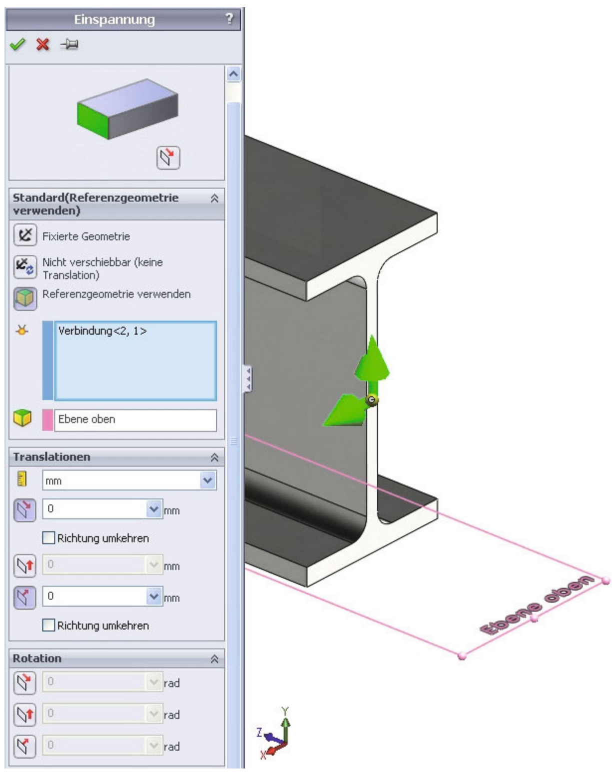


Nun sehen Sie das Symbol für Balken. Da es sich um zwei Volumenkörper handelt, wurde standardmäßig ein ***Globaler Kontakt (-Verbunden-)*** zwischen diesen festgelegt.



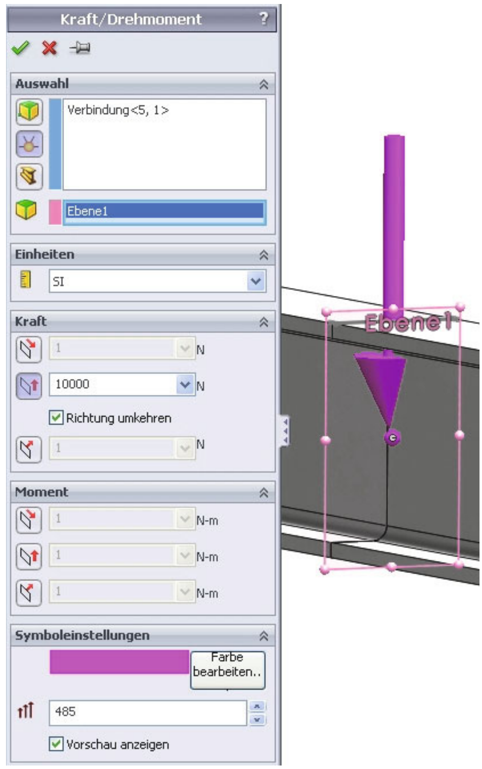
4. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
5. Definieren Sie das Festlager links. Wählen Sie unter ***Einspannungen-Fixierte Geometrie-Nicht verschiebbar (keine Translation)*** für den linken Knoten. Unter ***Symboleinstellungen*** können Sie sowohl die Farbe als auch die Größe der Pfeile ändern.

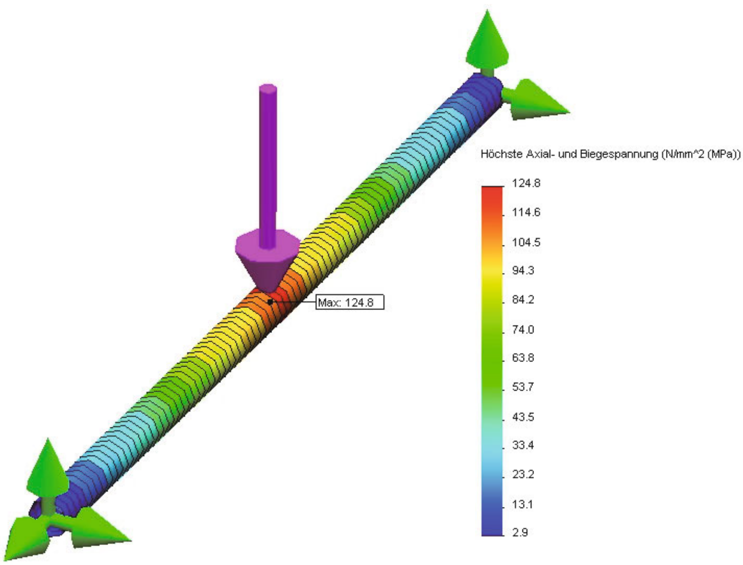




6. Nun die Definition des Loslagers rechts. Wählen Sie dazu unter ***Einspannungen-Fixierte Geometrie-Referenzgeometrie verwenden*** für den rechten Knoten. Wählen Sie ***Ebene oben*** (es können auch andere Ebenen verwendet werden) und setzen Sie die Translationen wie rechts dargestellt auf Null. Die Translation in axialer Richtung muss auf jeden Fall möglich bleiben. Die Rotationen müssen auch möglich sein, deshalb aktivieren wir sie nicht bzw. setzen Sie nicht auf Null. Auch hier können Sie die Symboleinstellungen anpassen.

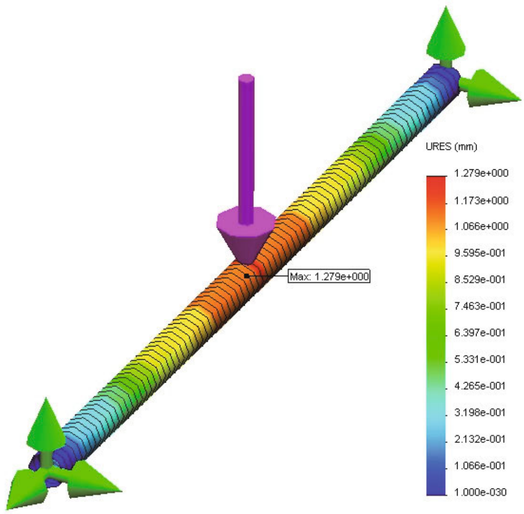
7. Definieren Sie die Last $F = 10\,000$ N mit ***Externe Lasten-Kraft***. Auch hier können Sie auf verschiedene Arten Einstellungen vornehmen. Die Kraft muss auf jeden Fall so wirken, wie in der rechten Grafik dargestellt: im mittleren Knoten nach unten.
8. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm und führen Sie die Studie aus.
9. Interpretation der Ergebnisse: Zuerst vergleichen wir die Spannungswerte. Blenden Sie ***Spannung1*** ein. Wenn Sie die Einheiten im Diagramm ändern wollen, können Sie dies mit Rechtsklick auf ***Spannung1-Definition bearbeiten*** tun. In der Mitte des Trägers erkennen Sie die maximale Von-Mises-Spannung $124{,}8\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Der berechnete Wert $\sigma_\mathrm{b} = 125\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ stimmt sehr gut überein.

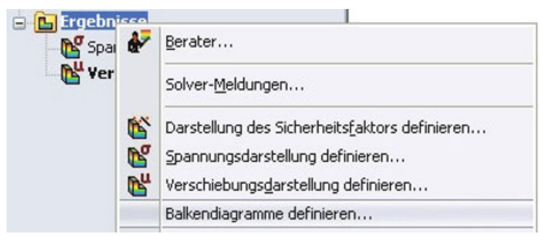




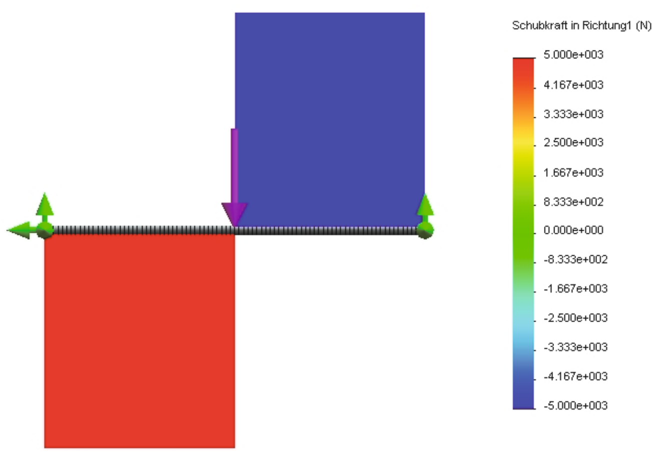
Der Träger sieht jetzt ganz anders aus. Jeder hohle Zylinder entspricht einem Element.

10. Jetzt vergleichen wir die Verformung. Dazu blenden Sie ***Verschiebung1*** ein. Die simulierte maximale Verformung 1,28 mm liegt ebenfalls nahe am berechneten Wert 1,24 mm .

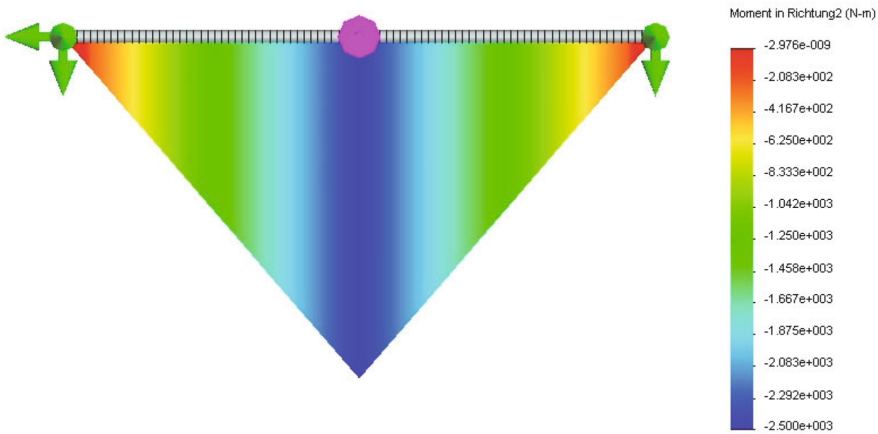




Wenn Sie mit Balkenelementen arbeiten, können auch Querkraft- und Biegemomenten-Verläufe dargestellt werden. Mit Rechtsklick auf ***Ergebnisse*** wählen Sie ***Balkendiagramme definieren***. In diesem Menü können Sie nun auswählen, welches Balkendiagramm dargestellt werden soll. Für den Querkraft-Verlauf wählt man ***Schubkraft in Richtung 1***:



Für den Biegemomenten-Verlauf wählt man ***Moment in Richtung 2***:



Warum wählt man beim Querkraft-Verlauf ***Schubkraft in Richtung 1*** und beim Biegemomenten-Verlauf ***Moment in Richtung 2***?

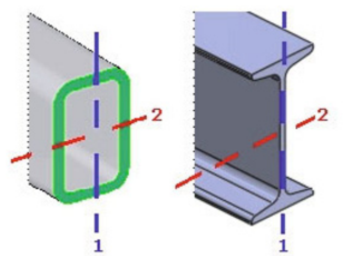
Dazu eine Erklärung aus dem SolidWorks Lehrbuch zur statischen Analyse (siehe in der rechten Abbildung).

Beim obigen Biegemomenten-Verlauf sieht man, dass das maximale Biegemoment in der Mitte des Trägers 2 500 Nm beträgt. Man kann dies mit einer einfachen Kontrollrechnung überprüfen:

$$M_{\text{bmax}} = 5\,000 \text{ N} \cdot 0.5 \text{ m} = 2\,500 \text{ Nm} .$$

Richtungen in Balken-Ergebnisdarstellungen und Diagrammen

Die Richtungen 1 und 2 für einen Balken werden über die Begrenzung des Quershnitts definiert. Für Querschnitte mit einer rechteckigen Begrenzung, ist Richtung 1 die längere der beiden Begrenzungsseiten. Die Richtungen 1 und 2 ändern sich für jeden Balken und liegen nicht relativ zum globalen Koordinatensystem des Modells. Beachten Sie die Richtungen 1 und 2 in den folgenden Bildern:



Die Balken in diesem Lehrbuch haben einen rechteckigen Querschnitt. Die lange Seite des Rechtecks ist Richtung 1, die kurze ist Richtung 2.

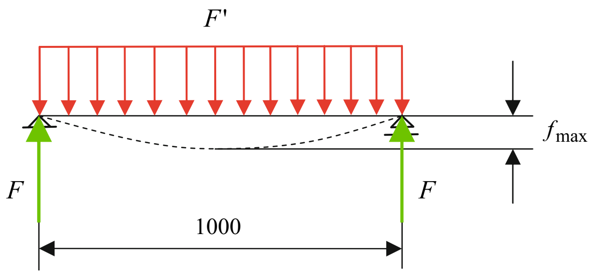
Sie erstellen ein Schubdiagramm in Richtung 1, da die Kräfte parallel auf die lange Seite des rechteckigen Querschnitts wirken. Sie erstellen ein Momentdiagramm in Richtung 2 und eine Darstellung von Biegespannung in Richtung 2, da die Kräfte um die Richtung 2 des rechteckigen Querschnitts wirken.

2.5 Stützträger mit Streckenlast

Der dargestellte Träger IPE 80 (S235) wird auf die ganze Länge mit der Streckenlast $F' = 10\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ belastet. Auf der linken Seite befindet sich ein Festlager und auf der rechten Seite ein Loslager. Es sind die maximalen Biegespannungen und die maximale Durchbiegung zu berechnen und mit einer Simulation zu überprüfen:

a) nur mit Streckenlast $F' = 10\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$

b) mit Streckenlast $F' = 10\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ und dem Eigengewicht.



Lösung:

a) Zuerst berechnen wir die maximale Biegespannung. Sie tritt in der Mitte des Trägers auf.

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = \frac{\frac{F \cdot l}{8}}{W} = \frac{\frac{10\,000\ \text{N} \cdot 1000\ \text{mm}}{8}}{20 \cdot 10^3\ \text{mm}^3} = 62{,}5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{mit } F = F' \cdot l)$$

Die maximale Durchbiegung kann ebenfalls einfach berechnet werden:

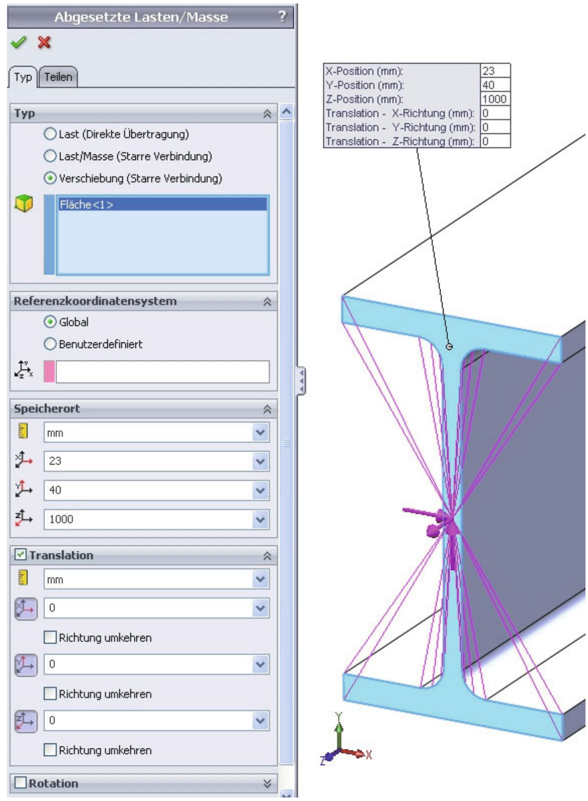
$$f_{max} = 0{,}013 \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I} = 0{,}013 \cdot \frac{10\,000\ \text{N} \cdot (1000\ \text{mm})^3}{210\,000\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 80{,}1 \cdot 10^4\ \text{mm}^4} = 0{,}773\ \text{mm}$$

Die Simulation wird zuerst als Volumenkörper und anschließend mit Balkenelementen durchgeführt.

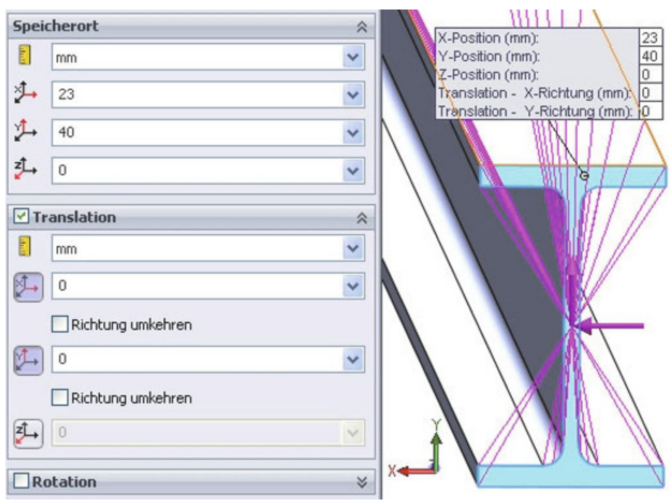
FEM-Analyse zu a) (Volumenkörper-Vernetzung, d. h. mit tetraedischen Volumenkörperelementen):

1. Öffnen Sie das Bauteil (Stützträger mit Streckenlast.sldprt).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.

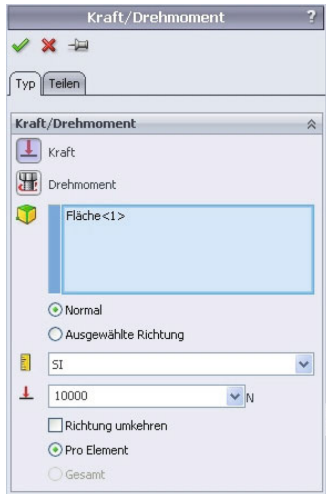
3. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie in der Studie unter ***Externe Lasten*** mit Rechtsklick ***Abgesetzte Last/ Masse***. Für das Festlager links müssen alle ***Translationen*** auf Null gesetzt werden (aktivieren durch Anklicken). Die ***Rotationen*** sind möglich, deshalb lassen wir sie zu. Die Position der ***Abgesetzten Last*** sollte sich im Schwerpunkt der Fläche befinden. Geben Sie deshalb die unter ***Speicherort*** dargestellten Werte ein. Sie beziehen sich auf den Ursprung des Trägers. Das heißt: Der Schwerpunkt der Fläche <1> hat die Koordinaten (23 mm/40 mm/1000 mm).

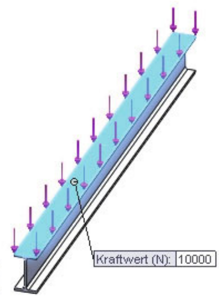


5. Für das Loslager rechts gehen Sie gleich vor. Nur beim Speicherort müssen Sie die folgenden Werte eingeben. Der Schwerpunkt dieser Fläche befindet sich nämlich in der x-y-Ebene. Die Translationen für die x- und y-Achsen sind wieder Null. Die Translation in z-Richtung soll aber ermöglicht werden. Die Rotationen sind alle möglich.

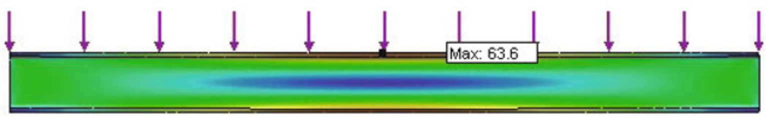


6. Definieren Sie eine Kraft von $F = 10\,000$ N auf der gesamten Oberseite des Trägers.
7. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm.
8. Führen Sie die Studie aus.
9. Interpretation der Ergebnisse:

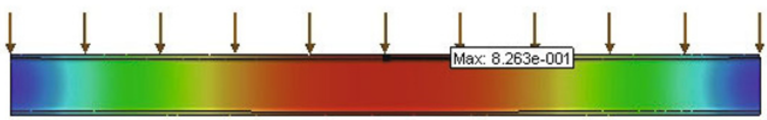




Die Von-Mises-Spannungen in der Mitte des Trägers betragen ca. $63{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.



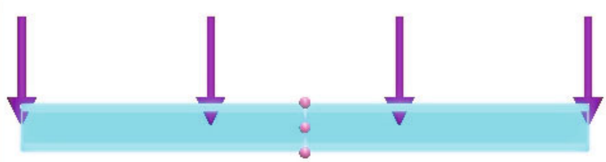
Die maximale Durchbiegung in der Mitte beträgt ca. 0,83 mm.



Sowohl Spannungen als auch Verformungen stimmen mit der analytischen Berechnung gut überein.

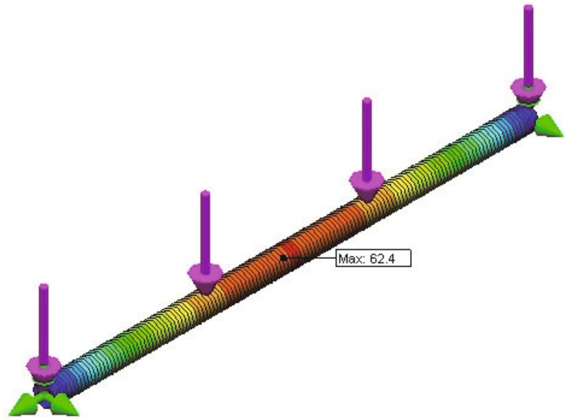
FEM-Analyse zu a) (Balken-Vernetzung, d. h. mit Balkenelementen):

Gehen Sie genau gleich vor, wie bei der oben bereits mit Balkenelementen durchgeführten Analyse. Bei der Lastdefinition nehmen Sie aber folgende Einstellungen vor:

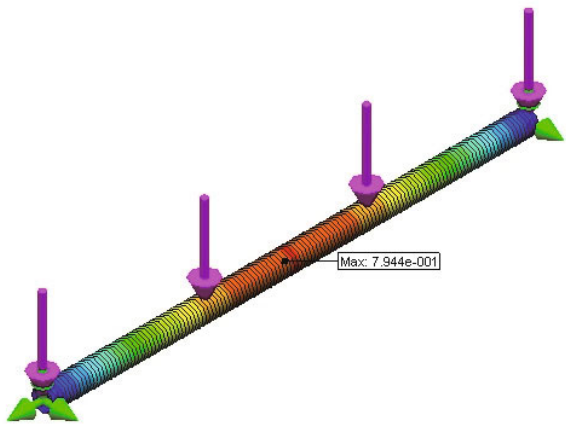


Da wir nur an beiden Enden des Trägers Knoten haben, wählt man den ganzen Balken, um die Streckenlast richtig festzulegen. So erhält man die folgenden Werte:

Die Von-Mises-Spannung in der Mitte des Trägers beträgt $62{,}4\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$.



Die maximale Durchbiegung in der Mitte beträgt ca. 0,79 mm.



b) Das Profil IPE 80 hat eine Gewichtskraft je Meter Länge von $F_G' = 59\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Diese beiden Streckenlasten kann man zusammenfassen:

$$F_{\mathrm{ges}}' = F' + F_{\mathrm{G}}' = 10\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} + 59\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 10\,059\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Für die Biegespannung erhält man so:

$$\sigma_{\mathrm{b}} = \frac{M_{\mathrm{b}}}{W} = \frac{\frac{F \cdot l}{8}}{W} = \frac{\frac{10\,059\ \mathrm{N} \cdot 1000\ \mathrm{mm}}{8}}{20 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3} = 62{,}9\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \quad (\text{mit } F = F_{ges}' \cdot l)$$

Die maximale Durchbiegung kann ebenfalls einfach berechnet werden:

$$f_{\max} = 0{,}013 \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I} = 0{,}013 \cdot \frac{10\,059\ \mathrm{N} \cdot (1000\ \mathrm{mm})^3}{210\,000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot 80{,}1 \cdot 10^4\ \mathrm{mm}^4} = 0{,}777\ \mathrm{mm}$$

Die Berücksichtigung des Eigengewichtes hat hier keinen großen Einfluss.

FEM-Analyse zu b):

Das Eigengewicht kann auf zwei Arten in der Simulation berücksichtigt werden:

1. Man definiert eine von außen wirkende Streckenlast.
2. Man definiert eine ***Schwerkraft***.

Es werden beide Varianten mit der letzten Studie (Balkenelemente) gezeigt:

1. Eigengewicht als äußere Streckenlast

Nehmen Sie die zuletzt durchgeführte Studie und erhöhen Sie die Kraft auf $F = 10\,059 \text{ N}$. Führen Sie die Analyse durch und interpretieren Sie die Ergebnisse.

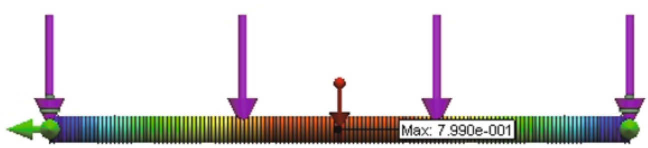
Die maximale Von-Mises-Spannung beträgt $62{,}8 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Die maximale Verformung beträgt $0{,}80 \text{ mm}$.

2. Eigengewicht als Schwerkraft

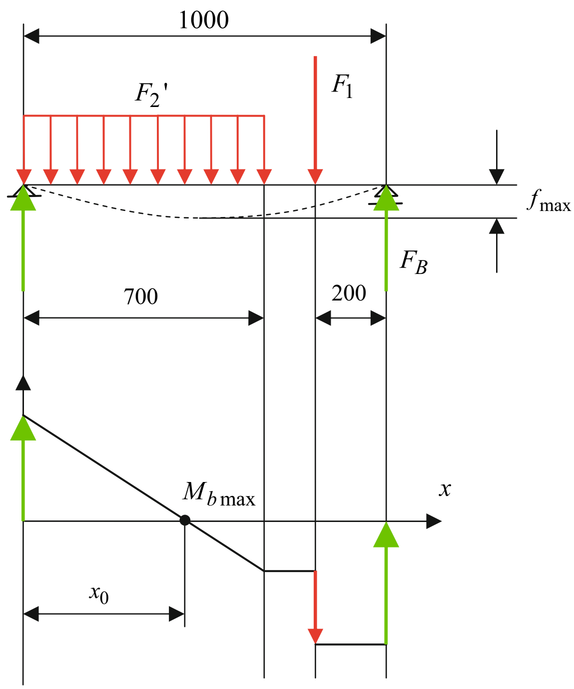
Nehmen Sie dieselbe Studie mit der Kraft $F = 10\,000 \text{ N}$ und fügen Sie die Schwerkraft in y-Richtung dazu. Führen Sie die Studie aus und vergleichen Sie mit den oben erhaltenen Simulationswerten.

Man erhält in beiden Fällen praktisch dieselben Werte. Auf jeden Fall erkennen wir, dass die Berücksichtigung des Eigengewichtes hier nicht erforderlich wäre.



2.6 Stützträger mit Mischlast

Der dargestellte Träger IPE 80 (S235) wird mit der Streckenlast $F_2' = 10\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ und der Einzellast $F_1 = 6\,000\ \text{N}$ belastet. Auf der linken Seite befindet sich ein Festlager und auf der rechten Seite ein Loslager. Es sind die maximalen Biegespannungen ohne Berücksichtigung des Eigengewichts zu berechnen und mit einer Simulation zu überprüfen.



Lösung:

Die maximale Biegespannung tritt nicht in der Mitte des Trägers auf. Wir müssen deshalb das maximale Biegemoment und dessen Position bestimmen. Als erstes werden die Auflagerkräfte F_A und F_B aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet:

$$\sum F_y = 0 = F_A + F_B - F_2' \cdot 0{,}7\ \text{m} - F_1$$

$$\sum M_A = 0 = F_B \cdot 1\,000\ \text{mm} - F_1 \cdot 800\ \text{mm} - F_2' \cdot 0{,}7\ \text{m} \cdot 350\ \text{mm}$$

$F_A = 5\,750\ \text{N}$ und $F_B = 7\,250\ \text{N}$.

Aus dem Querkraft-Verlauf $F_q(x)$ kann das maximale Biegemoment M_{bmax} berechnet werden (es tritt an der Nullstelle des Graphen auf).

Zuerst aber noch die Nullstelle x_0 mit dem Strahlensatz:

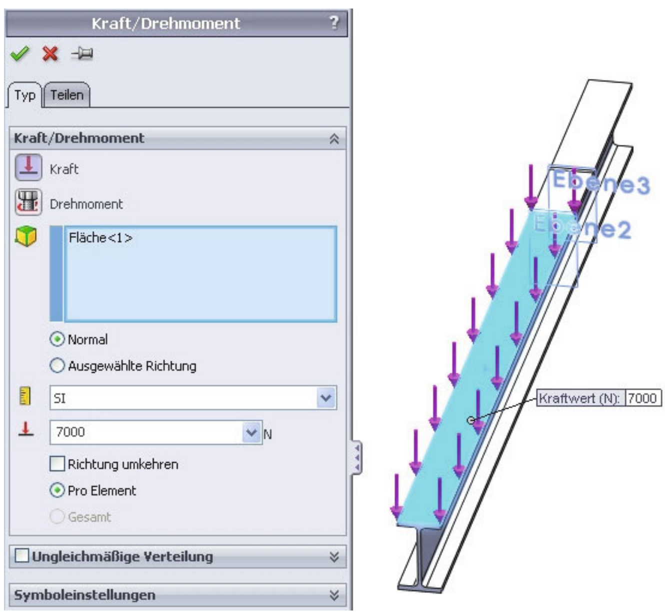
$$\frac{x_0}{5\,750\text{ N}} = \frac{700\text{ mm - x}_0}{1\,250\text{ N}} \Rightarrow x_0 = 575\text{ mm}$$

$$M_{\text{bmax}} = \frac{5\,750\text{ N}\cdot 575\text{ mm}}{2} = 1\,653\,125\text{ Nmm}$$

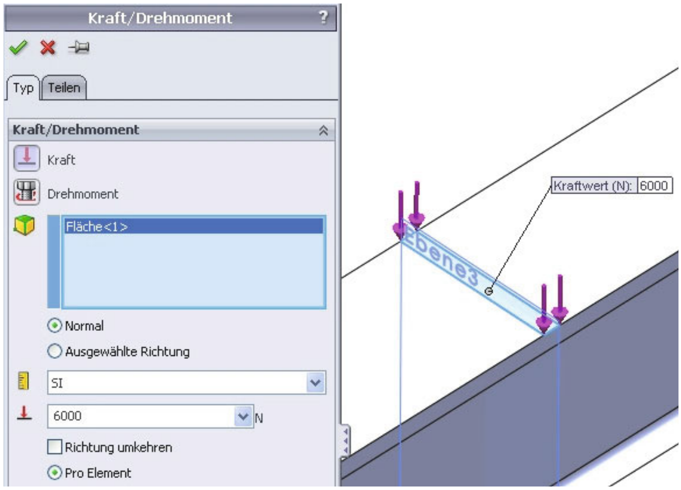
$$\sigma_{\text{b}} = \frac{M_{\text{bmax}}}{W} = \frac{1\,653\,125\text{ Nmm}}{20\cdot 10^3\text{ mm}^3} = 82{,}7\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

FEM-Analyse (als Volumenkörper):

1. Öffnen Sie das Bauteil (Stützträger mit Mischlast.sldprt).
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
4. Definieren Sie Fest- und Loslager genau gleich wie bei Stützträger mit Streckenlast.
5. Um die Streckenlast auf den ersten 700 mm definieren zu können, kann man die bereits vorhandene ***Trennlinie1*** verwenden. Geben Sie dazu die Kraft $7\,000\text{ N}$ ein (weil $10\,000\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot 0{,}7\text{ m} = 7\,000\text{ N}$).

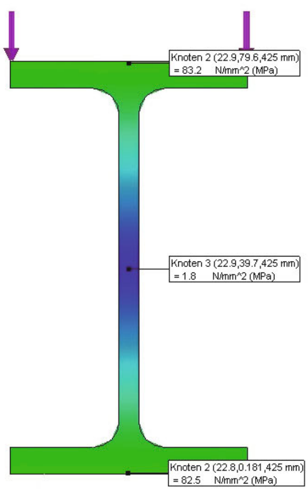


6. Definieren Sie die Einzellast $F_1 = 6\,000\text{ N}$ auf die bereits vorbereitete ***Trennlinie2***. Diese Fläche ist 5 mm breit. Natürlich könnte man die Einzellast auch auf eine Linie definieren. Das würde dann aber zu noch größeren Spannungssingularitäten führen und entspricht auch weniger der Realität. Der Kraftangriff wird immer über eine Fläche stattfinden.



7. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm und führen Sie die Studie aus.
8. Interpretieren Sie das Ergebnis: Wählen Sie ***Profil-Clipping*** (Rechtsklick auf ***Spannung1***) bei der ***Ebene Max Biegemoment*** und ***Sondieren*** Sie dort die Spannungswerte.

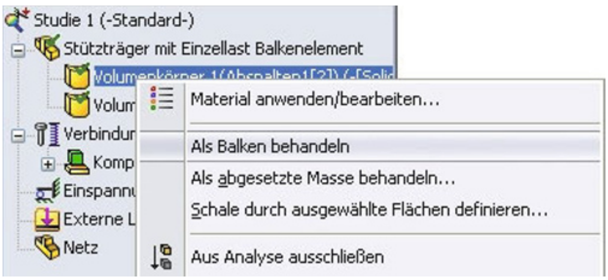
   Um das ***Profil-Clipping*** wieder aufzuheben, klicken Sie wieder mit Rechtsklick auf ***Spannung1-Profil-Clipping*** und dann klicken Sie auf (1).



Die maximalen Von-Mises-Spannungen liegen etwa bei $83 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

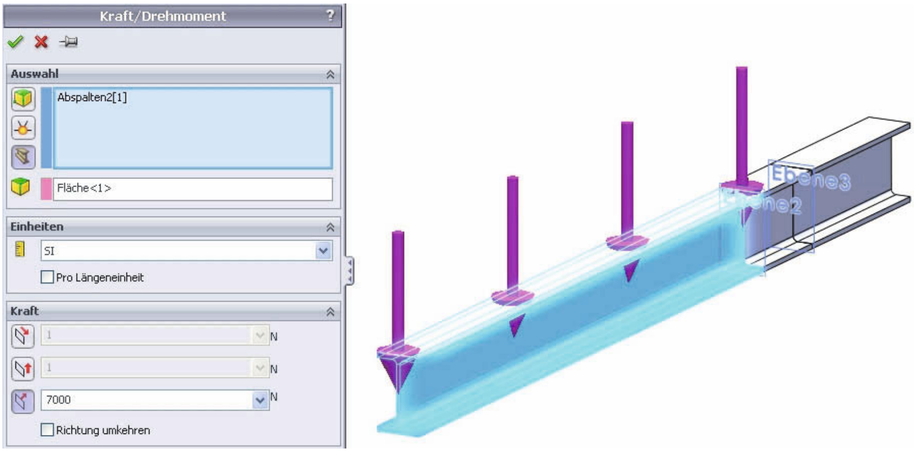
FEM-Analyse (als Balkenelement):

1. Öffnen Sie das Bauteil (Stützträger mit Mischlast Balkenelement.sldprt). Beim Betrachten des Modells fällt auf, dass es keine ***Trennlinie*** mehr gibt. Der Träger wurde durch ***Abspalten*** mit den ***Ebenen 2 und 3*** in zwei Volumenkörper aufgeteilt. Dieses Abspalten ist für die Vernetzung mit Balkenelementen und das Definieren von Lasten erforderlich.
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Weisen Sie das Material zu (unlegierter Baustahl).
4. Wählen Sie für alle drei Volumenkörper ***Als Balken behandeln*** und anschließend ***Verbindungsgruppe Bearbeiten***. Stellen Sie auf ***Alle*** bei ***Balken suchen*** und dann ***Berechnen***.

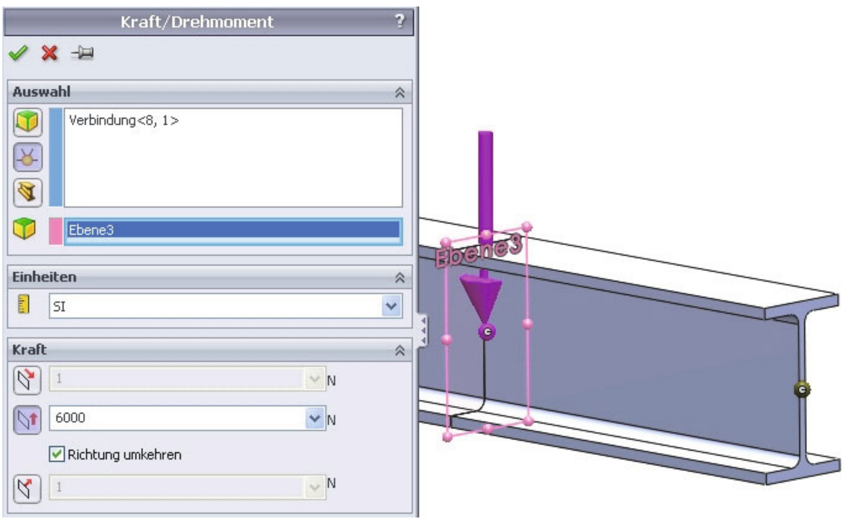


Nun sehen Sie das Symbol für Balken. Da es sich um drei Volumenkörper handelt, wurde standardmäßig ein ***Globaler Kontakt (-Verbunden-)*** zwischen diesen festgelegt.

5. Definieren Sie Fest- und Loslager wie z. B. bei Stützträger mit Streckenlast.
6. Definieren Sie die Streckenlast von 7 000 N auf dem ersten Teil des Balkens auf Fläche <1>. Wählen Sie dazu Balken 

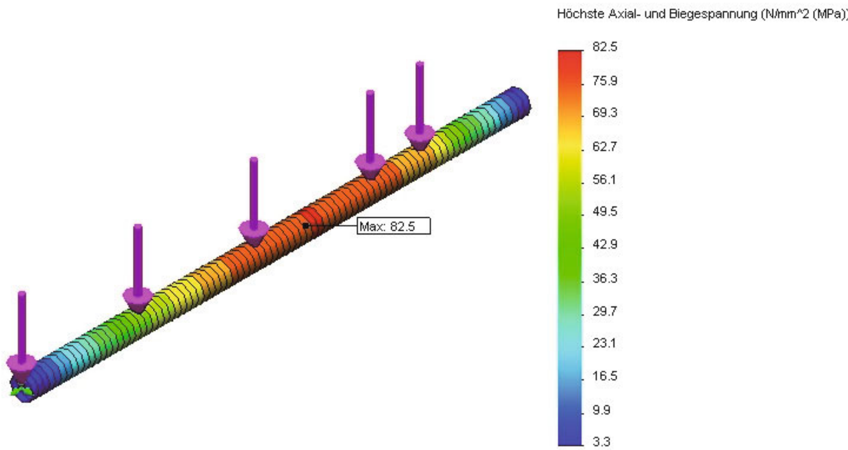


7. Definieren Sie die Einzellast $F_1 = 6\,000$ N auf dem Knoten. Wählen Sie dazu den unten dargestellten Knoten .

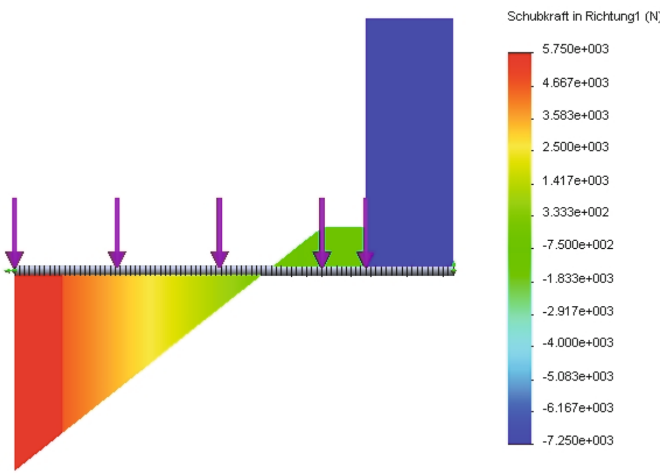


8. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von 7 mm und führen Sie die Studie aus.

   Interpretation der Ergebnisse: Mit Rechtsklick auf ***Spannung1*** können Sie unter ***Definition bearbeiten*** verschiedene Einstellungen vornehmen oder den Spannungsverlauf darstellen. Die maximale Von-Mises-Spannungen beträgt $82{,}5\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

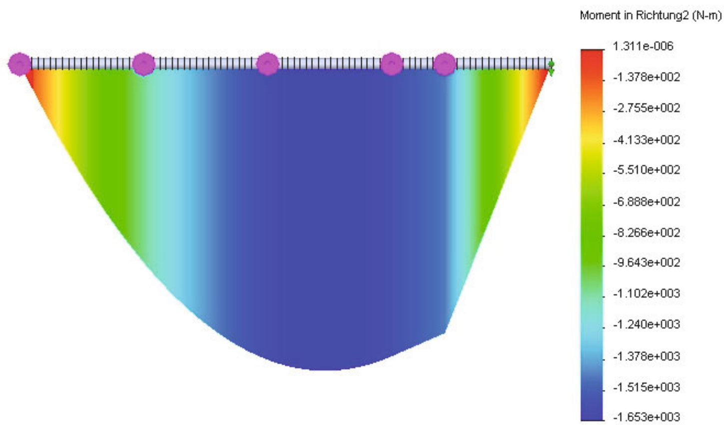


9. Jetzt stellen wir den Querkraft-Verlauf dar. Wählen Sie mit Rechtsklick auf ***Ergebnisse-Balkendiagramme definieren*** aus. Stellen Sie auf ***Schubkraft in Richtung1*** ein, erhalten Sie die folgende Darstellung:



Dieser Querkraft-Verlauf stimmt mit dem „von Hand" erstellten überein. Der Unterschied besteht nur darin, dass dieser Graph an der x-Achse gespiegelt ist, was auf eine andere Vorzeichenregel schließen lässt. Uns interessieren aber der Verlauf und die Beträge der Kraft. Oben haben wir berechnet: $F_A = 5\,750 \text{ N}$ und $F_B = 7\,250 \text{ N}$. Diese Werte stimmen genau mit den Simulationswerten überein.

10. Biegemomenten-Verlauf: Wählen Sie wieder mit Rechtsklick ***Ergebnisse-Balkendiagramme definieren*** aus. Stellen Sie ***Moment in Richtung2*** ein, so erhalten Sie die folgende Darstellung:



Oben haben wir analytisch für das maximale Biegemoment berechnet:

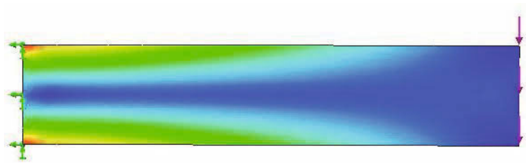
$$M_{\text{bmax}} = \frac{5\,750 \text{ N} \cdot 575 \text{ mm}}{2} = 1\,653\,125 \text{ Nmm}$$

Dem Diagramm entnehmen wir $M_{\text{bmax}} = 1653$ Nm . Auch dieser Wert stimmt.

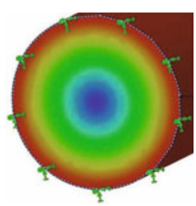
Bei den durchgeführten Berechnungen und den anschließenden Simulationen erkennen wir meistens eine sehr gute Übereinstimmung der Resultate. Ein Vorteil der Simulation ist der, dass man die Spannung im gesamten Bauteil sieht.

Nehmen wir zum Beispiel den Biegebalken:

Man sieht sehr gut, wie die Spannung in der obersten Faser von links nach rechts abnimmt, weil nämlich das Biegemoment nach rechts immer kleiner wird. In der oberen Faser handelt es sich dabei um Zugspannungen, in der unteren Faser um Druckspannungen. Der mittlere Teil ist zudem ziemlich spannungsfrei.



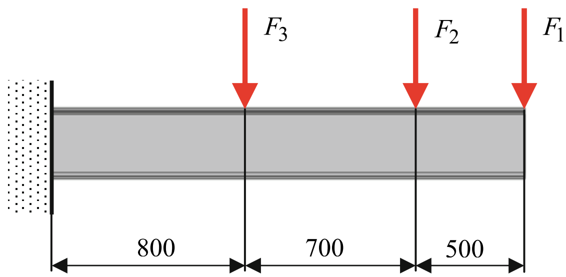
Auch beim Torsionsstab sieht man, wie die Spannungen gegen die Mitte immer kleiner werden:



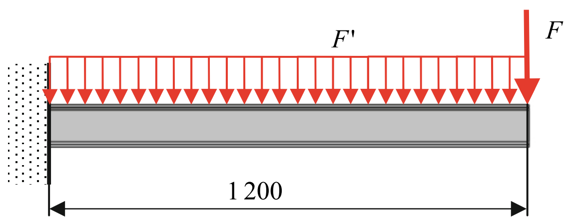
Es folgen nun ein paar Übungen, bei denen Sie das Erlernte anwenden und festigen können.

2.7 Übungen

1. Der dargestellte Freiträger ist ein IPE-300-Profil. Er soll die Lasten $F_1 = 15\ \text{kN}$, $F_2 = 9\ \text{kN}$ und $F_3 = 20\ \text{kN}$ aufnehmen. Ermitteln Sie die im Freiträger auftretenden Höchstspannungen. Führen Sie sowohl eine Handrechnung als auch eine Simulation dazu durch. (bei der Simulation spielen Sie beide Varianten durch: Volumenkörper/Balkenelemente).



2. Der dargestellte Freiträger ist ein IPE-100-Profil. Er wird durch eine Einzellast $F = 1\ \text{kN}$ und die Streckenlast $F' = 4\ \dfrac{\text{kN}}{\text{m}}$ belastet. Ermitteln Sie die im Freiträger auftretenden Höchstspannungen.



3. Der Träger mit skizziertem Profil wird durch die beiden Einzellasten $F = 20\ \text{kN}$ und die Streckenlast $F' = 4\ \dfrac{\text{kN}}{\text{m}}$ belastet. Ermitteln Sie die maximale Biegespannung. An welcher Stelle im Träger tritt sie auf?